Ingegneria Industriale (G – Pa). Compito di **Algebra Lineare e Geometria** del 12/12/02

I

È assegnato l'endomorfismo $f:\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ mediante le relazioni

$$\begin{array}{l} f(1,2,1) = (1,2,1) \\ f(1,2,2) = (1-k, 2-k, 2-k) \\ f(0,1,0) = (k, k+1, k) \end{array}$$

con k parametro reale.
1) Studiare l'endomorfismo f al variare di k determinando in ciascun caso Imf e Ker$f$.
2) Determinare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica.
3) Verificare che f è semplice per ogni valore di k e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro.
4) Nel caso $k = 1$ verificare che Im$f \oplus$ Ker$f = \mathbf{R}^3$.
5) Per quale valore di k risulta $(1,0,1) \notin$ Imf?

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}.u.$
1a) Determinare la generica retta $\mathbf{r}$ che passa per il punto $P \equiv (1,1,0)$ e forma con l'asse $\vec{z}$ un angolo di $\frac{\pi}{3}$.
1b) Determinare il luogo descritto dalla retta $\mathbf{r}$ e verificare che questo luogo è un cono C con vertice in P.
1c) Studiare la conica che si ottiene secando C col piano $z = 1$.
2) Studiare il fascio Φ di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$\Phi:\ (1+h)x^2 + y^2 - hy - 1 - h = 0$$

determinandone in particolare i punti base e le coniche spezzate.
Determinare il vertice, il fuoco e l'asse di simmetria della parabola di Φ.

SVOLGIMENTO

I

1) Per studiare l'endomorfismo determiniamo la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica, rispondendo anche alla domanda 2). Dalle relazioni assegnate abbiamo:

$$\begin{cases} f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) = (1,2,1) \\ f(e_1) + 2f(e_2) + 2f(e_3) = (1-k, 2-k, 2-k) \\ f(e_2) = (k, k+1, k) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(e_1) = (1-k, -k, -k) \\ f(e_2) = (k, k+1, k) \\ f(e_3) = (-k, -k, 1-k) \end{cases}$$

quindi la matrice cercata è

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1-k & k & -k \\ -k & k+1 & -k \\ -k & k & 1-k \end{pmatrix}$$

Per determinare il rango di questa matrice ne calcoliamo il determinante

$$|M(f)| = (1-k^2)(1-k) + 2k^3 - k^2(1+k) + 2k^2(1-k) = (1-k^2)(1-k) + k^2(2k-1-k+2-2k) =$$

$$= (1-k)(1-k^2+k^2) = (1-k)$$

quindi dobbiamo considerare due casi:
$k \neq 1$ f è un isomorfimo;
$k = 1$ la matrice diventa

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2. Avremo $\mathrm{Im} f = \mathcal{L}((0,1,1),\ (1,1,0))$ mentre per determinare il nucleo dovremo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ker f = \{(x,x,x)\} \text{ con base } (1,1,1)$$

.
3) Studiamo la semplicità di f. Osserviamo che le relazioni che lo definiscono forniscono l'autovettore $(1,2,1)$ rispetto all'autovalore 1.

$$\begin{vmatrix} 1-k-T & k & -k \\ -k & k+1-T & -k \\ -k & k & 1-k-T \end{vmatrix} = (1-k-T)^2(k+1-T)+2k^3-k^2(k+1-T)+2k^2(1-k-T) =$$

$$(1-k-T)^2(k+1-T)+k^2(2k-k-1+T+2-2k-2T) = (1-k-T)^2(k+1-T)+k^2(1-k-T) =$$

$$(1-k-T)(1-T)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} T = 1 \quad (m=2) \\ T = 1-k \end{matrix}$$

Se $k = 0$ si ha l'autovalore $T = 1$ con molteplicità 3; in questo caso f è l'identità, quindi è semplice. Supponiamo $k \neq 0$.
$T = 1$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} -k & k & -k \\ -k & k & -k \\ -k & k & -k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{x - y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \{(x, x+z, z)\} \text{ con base } \begin{matrix} u_1 = (1,1,0) \\ u_2 = (0,1,1) \end{matrix}$$

$T = 1-k$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & k & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_{1-k} = \{(x,x,x)\} \text{ con base } u_3 = (1,1,1).$$

Si osservi che i tre autovettori u_1, u_2, u_3 formano una base indipendente dal parametro k.
4) Ritornando allo studio di f, abbiamo visto che per $k = 1$

$$\mathrm{Im} f = \mathcal{L}((0,1,1),(1,1,0)), \quad \mathrm{Ker} f = \mathcal{L}(1,1,1)$$

e siccome i tre vettori sono l.i., si ottiene l'uguaglianza richiesta. Peraltro basta osservare che $\mathrm{Im} f = V_1$ e che $\mathrm{Ker} f = V_0$.
5) Ancora dallo studio di f sappiamo che per $k \neq 1$ si ha $\mathrm{Im} f = \mathbf{R}^3$, quindi solo per $k = 1$ può aversi $(1,0,1) \notin \mathrm{Im} f$. Verifichiamo:

$$(1,0,1) = x(0,1,1) + y(1,1,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 1 \\ x + y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{che è impossibile.}$$

1a) La generica retta passante per P ha equazioni

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x-1=mz \\ y-1=nz \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{di punto improprio } R_\infty \equiv (m,n,1,0)$$

ed imponendo che l'angolo $\widehat{\mathbf{r}\vec{z}}$ abbia coseno $\frac{1}{2}$ si trova

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m^2+n^2+1=4 \quad \Rightarrow \quad m^2+n^2-3=0$$

che è la condizione cui debbono soddisfare i parametri m ed n che compaiono nell'equazione di $\mathbf{r}$.

1b) Per trovare il luogo descritto dalla retta $\mathbf{r}$ basta ricavare i parametri dalle equazioni di $\mathbf{r}$ e sostituirli nella relazione trovata:

$$m = \frac{x-1}{z}, \; n = \frac{y-1}{z} \quad \Rightarrow \quad C: \; (x-1)^2+(y-1)^2-3z^2=0$$

Per verificare quanto richiesto consideriamo la matrice associata a C e cerchiamo i suoi vertici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{vertice } (1,1,0) \equiv P$$

1c) Effettuando la richiesta sezione si trova la conica di equazioni

$$\begin{cases} z=1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=3 \end{cases}$$

e vediamo che si tratta della circonferenza del piano $z=1$ di centro $(1,1,1)$ e raggio $\sqrt{3}$.

2) Consideriamo la matrice B associata a Φ per valutarne il rango

$$B = \begin{pmatrix} 1+h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{h}{2} \\ 0 & -\frac{h}{2} & -1-h \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = (1+h)(-1-h-\frac{h^2}{4}) = -\frac{1}{4}(1+h)(h+2)^2$$

quindi le coniche spezzate sono:
$h=-1 \quad y(y+1)=0$
$h=-2 \quad (x+y+1)(x-y-1)=0$
e secando queste due coniche si trovano subito i punti base: $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ due volte.

Per classificare le coniche irriducibili di Φ osserviamo che per $h=\infty$ si trova la parabola $x^2-y-1=0$; calcolando $|A|=1+h$ si trova:
$|A|>0 \quad h>-1$ ellissi. Per $h=0$ si trova la circonferenza $x^2+y^2-1=0$
$|A|<0 \quad h<-1$ iperboli. Non ci sono iperboli equilatere.
$|A|=0 \quad h=-1$ spezzata.

Abbiamo già visto che Φ contiene solo la parabola

$$\mathbf{p}: \; y=x^2-1$$

poiché si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse $\vec{y}$, applicando le relative formule vediamo che:

$$V \equiv (0,-1); \quad F \equiv (0,\frac{1}{8}); \quad \text{asse: } x=0$$