FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Edile Architettura e Gestionale

Prova scritta di **Algebra linearee Geometria** assegnata il 21/07/2005

I

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(1,1,1) = (1-h, 1+h, 1);\ \ f(-1,-1,1) = (1-h, -1-h, -1);\ \ f(0,1,-1) = (h-1, 1+h, 0)$$

1. Studiare tale endomorfismo, al variare di h, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Studiare, al variare di h, la semplicità di f.
3. Per $h = 0$, diagonalizzare la matrice $A = M^{E,E}(f)$, rispetto alle basi canoniche.
4. Detto $V = \{(x,y,z)|\ x-y+z = 0;\ x-z = 0\}$; determinare $W = f(V)$, al variare di h.

Risoluzione

1. Risolvendo il sistema ad incognite vettoriali $f(e_1);\ f(e_2);\ f(e_3)$, si ricava facilmente che $f(e_1) = (0,0,1);\ f(e_2) = (0, 1+h, 0);\ f(e_3) = (1-h, 0, 0)$. Quindi la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-h \\ 0 & 1+h & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   E' facile vedere che $|A| = 0$ per $h = \pm 1$. Quindi per $h \neq 1, -1$ si ha un isomorfismo.
   Per $h = 1$ la matrice diventa $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il rango $r(A) = 2$ e quindi la dimensione dell'immagine è 2, mentre la dimensione del nucleo è 1.
   Una base dell'immagine è data da $(0,0,1);\ (0,1,0)$; il nucleo ha base $(0,0,1)$.
   Per $h = -1$ la matrice A diventa $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; il suo rango è due e una base dell' immagine è data da $(0,0,1);\ (1,0,0)$; il nucleo ha come base $(0,1,0)$.
2. Per studiare la semplicità scriviamo la matrice caratteristica; essa è

$$(A - TI) = \begin{pmatrix} -T & 0 & 1-h \\ 0 & (1+h)-T & 0 \\ 1 & 0 & -T \end{pmatrix}$$

   Il polinomio caratteristico è $|A - TI| = [(1+h) - T][T^2 - (1-h)]$. Quindi le radici del polinomio caratteristico sono $T_1 = 1+h;\ T_2 = -\sqrt{1-h};\ T_3 = \sqrt{1-h}$. Intanto tali radici per essere autovalori devono essere reali. Ciò accade per $h \leq 1$.
   Distinguiamo tutti i possibili casi.

Per $h = 1$,
$T_1 = 2; T_2 = T_3 = 0$. Quindi l'autovalore nullo è con molteplicità due.
La matrice caratteristica per tali valori diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi l'autospazio associato all'autovalore nullo ha dimensione 3-2=1< della molteplicità. L'endomorfismo in tal caso non è semplice.
Un caso da esaminare è il seguente: potrebbe accadere che $T_1 = T_2$ oppure $T_1 = T_3$.
Ciò se fosse $1 + h = \pm\sqrt{1-h}$; questo accade per $h = 0$ oppure per $h = -3$.
Per $h = 0$
si ha $T_1 = 1$ $m = 2$. La matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha rango 1 e la $dim(V_1) = 2 = m$. In tal caso l'endomorfismo è semplice.
l'altro caso da esaminare è per $h = -3$.
$T_1 = -2 = m = 2$, $T_3 = 2$. La matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; essa ha rango 1 e quindi anche in questo caso l'endomorfismo è semplice.
Infine l'endomorfismo è semplice per tutti i valori $h < 1$ e $h \neq 0, -3$, perchè in tal caso gli autovalori sono reali e dsitinti.

3. Per $h = 0$ si deve diagonalizzare la matrice A. Ciò significa determinare la matrice diagonalizzante. Riprendiamo il caso già trattto per $h = 0$; gli autovalori sono $T_1 = T_3 = 1$ e $T_2 = -1$. Gli autovettori associati sono rispettivamente $(1, 0, 1)$; $(0, 1, 0)$; $(1, 0, -1)$.
In definitiva si ha
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$
dove $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Consideriamo il generico vettore (x, y, z) del dominio. La sua immagine si trova usando la matrice A come operatore. Cioè
$$A\underline{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-h \\ 0 & 1+h & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-h)z = y_1 \\ (1+h)y = y_2 \\ x = y_3 \end{pmatrix}$$
Tenendo conto che x, y, z non sono indipendenti ma soddisfano $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} y = 2z \\ x = z \end{cases}$ si ha $\begin{cases} y_1 = (1-h)y_3 \\ y_2 = 2(1+h)y_3 \end{cases}$.
In definitiva W è il sottospazio $y_3(1-h, 2(1+h), 1)$.
Maniera alternativa.
Il sottospazio V è generato da $(1, 2, 1)$. Troviamo l'immagine di questo vettore, secondo f. Si trova $f(1, 2, 1) = (1-h, 2(1+h), 1)$. Quindi W è il sottospazio generato da $(1-h, 2(1+h), 1)$.

II

Sia fissato nello spazio un sisstema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

1. Nel piano $z = 0$ è dato il fascio di coniche

$$(1+h)x^2 + (1+h)y^2 + 2(1-h)xy - 2 = 0$$

Studiare il fascio, al variare del parametro, individuando i punti base e le coniche spezzate del fascio.

2. Sia γ la conica del fascio passante per $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, trovare una sua forma canonica ed il cambiamento di coordinate che l'ha determinata.

3. Trovare l'equazione del cono avente γ come direttrice e vertice il punto $V = (1, 1, -1)$.

Risoluzione

1. Scriviamo l'equazione del fascio nel modo seguente:

$$(x^2 + y^2 + 2xy - 2) + h(x^2 + y^2 - 2xy) = 0$$

Si vede facilmente che le due coniche con cui si è formato il fascio sono entrambe spezzate. La prima si spezza nella conica $(x+y)^2 - 2 = (x + y - \sqrt{2})(x + y + \sqrt{2}) = 0$ e la seconda nella retta $(x - y)^2 = 0$, contata due volte.
Evidentemente per trovare le coniche spezzate basta trovare i valori di h che annullano il determinante della matrice B. I punti base del fascio si trovano intersecando due qualunque coniche; noi prendiamo le due coniche spezzate. Quindi si ha il sistema $\begin{cases} x = y \\ x + y - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$. Si ottiene la soluzione $A = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Questo punto deve essere contato due volte perchè la retta $x = y$ è contata due volte. Analogamente si considera il sistema $\begin{cases} x = y \\ x + y = -\sqrt{2} \end{cases}$. Si ottiene la soluzione $B = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Anche questo punto deve essere contato due volte, per la stessa ragione.
In definitiva il nostro è un fascio di coniche bitangenti alle due rette $x + y = \pm\sqrt{2}$, nei due punti A e B.
Consideriamo la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 1+h & 1-h \\ 1-h & 1+h \end{pmatrix}$. Il suo determinante è $|A| = 4h$.
Si hanno **ellissi** per $h > 0$.
Si hanno **iperboli** per $h < 0$. In tale fascio non si hanno parabole, perchè i valori che annullano il determinate di A annullano anche il determinate di B>

2. Cerchiamo adesso la conica γ del fascio passante per $(\frac{1}{2}, 0, 0)$. Si ottiene $h = 7$. Quindi la conica da studiare è $\begin{cases} z = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 6xy - 1 = 0 \end{cases}$.
Consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.
$|B| = -7$; $|A| = 7$. Quindi la conica γ è una ellisse. $|A - TI| = \begin{vmatrix} 4-T & -3 \\ -3 & 4-T \end{vmatrix}$. Gli autovalori sono $\alpha = 1$; $\beta = 7$. Ed ancora
$-\alpha\beta\gamma = -7$; $\alpha\beta 7$. Da ciò segue $\gamma = 1$.
Quindi una forma canonica è $\frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{\frac{1}{7}} = 1$. Il centro di simmetria coincide con lrigine delle coordinate. La matrice della rototraslazione è $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Troviamo il cono avente γ come direttrice e vertice $V = (1, 1, -1)$.
Sia $G = (\alpha, \beta, 0)$ un punto generico su γ. Quindi dovrà essere $4\alpha^2 + 4\beta^2 - 6\alpha\beta - 1 = 0$.
Consideriamo le equazioni della retta VG. Esse sono: $\frac{x-\alpha}{1-\alpha} = \frac{y-\beta}{1-\beta} = -z$
Sostituendo α e β nell'equazione di condizione si ha l'equazione del cono.