CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale -
- Ingegneria Edile-Architettura (A-L),(M-Z)-
Ingegneria delle Telecomunicazioni -
- Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 8 Settembre 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$ e $v_3 = (0,1,1,0)$, sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to V$ l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= hv_1 + 2v_2 - v_3 \\ f(e_2) &= hv_1 - 2v_2 + hv_3 \\ f(e_3) &= -hv_1 + (1-h)v_3 \\ f(e_4) &= 2hv_1 + (h-1)v_2 + (h-1)v_3 \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare l'applicazione lineare f al variare del parametro reale h, determinando, in ciascun caso, Ker f e Im f.

2) Calcolare $f^{-1}(hv_1)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Detta g la restrizione di f a V, studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Sia $h = 0$ e sia $\varphi\colon V \to V$ l'applicazione lineare data da:

$$\begin{aligned} \varphi(1,0,0,1) &= (k+1, k-1, -1, 1) \\ \varphi(0,1,0,-1) &= (0, k+2, k+1, -1) \\ \varphi(1,1,1,1) &= (0, k, -2, k) \end{aligned}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\varphi = g$.

Soluzione

1) Notiamo che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Infatti la seguente matrice ha rango 3, come si vede scambiando le righe R_2 e R_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è la corrispondente base di V, otteniamo subito che:

$$M^{\mathscr{E},\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h & h & -h & 2h \\ 2 & -2 & 0 & h-1 \\ -1 & h & 1-h & h-1 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo la matrice e supponiamo $h \neq 0$. Otteniamo:

$$\begin{pmatrix} h & h & -h & 2h \\ 0 & -4 & 2 & h-5 \\ 0 & 1-h & 0 & \dfrac{(h-1)(h-2)}{2} \end{pmatrix},$$

da cui ricaviamo che per $h \neq 0,1$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{E},\mathscr{A}}) = 3$, cioè per $h \neq 0,1$ $\operatorname{Im} f = V$, il che vuol dire che f è suriettiva. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$:

$$\begin{cases} hx + hy - hz + 2ht = 0 \\ -4y + 2z + (h-5)t = 0 \\ (1-h)y + \dfrac{(h-1)(h-2)}{2}t = 0 \end{cases} \overset{h\neq 0,1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{h-2}{2}t \\ z = \dfrac{h+1}{2}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((-1, h-2, h+1, 2)).$$

Se $h = 1$, allora:

$$M^{\mathscr{E},\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{E},\mathscr{A}}) = 2$ e che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(v_1 + 2v_2 - v_3, -v_1) = \mathscr{L}(v_1 + 2v_2 - v_3, v_1) = \mathscr{L}(2v_2 - v_3, v_1) = \mathscr{L}((0,-1,1,2),(1,1,0,0))$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 2$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = 0,\ x - y = 0\} = \\ = \{(x,x,2x+2t,t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,1,2,0),(0,0,2,1)). \end{aligned}$$

Se $h = 0$, allora:

$$M^{\mathscr{E},\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

che è ridotta di rango 2, da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(2v_2 - v_3, -2v_2) = \mathscr{L}(2v_2 - v_3, v_2) = \mathscr{L}(v_2, v_3) = \mathscr{L}((0,0,1,1),(0,1,1,0))$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 2$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 2y - t = 0,\ -x + z - t = 0\} = \\ = \{(x,y,3x-2y,2x-2y) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,0,3,2),(0,1,-2,-2)). \end{aligned}$$

2) Per calcolare $f^{-1}(hv_1)$ dobbiamo risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} h & h & -h & 2h & h \\ 2 & -2 & 0 & h-1 & 0 \\ -1 & h & 1-h & h-1 & 0 \end{array}\right).$$

Per $h \neq 0$ riducendo otteniamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} h & h & -h & 2h & h \\ 0 & -4 & 2 & h-5 & -2 \\ 0 & 1-h & 0 & \dfrac{(h-1)(h-2)}{2} & 1-h \end{array}\right).$$

Se $h \neq 0,1$, vediamo che $\rho(A|B) = \rho(A) = 3$. Questo significa che il sistema ammette soluzioni, anzi, in particolare, ammetterà $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni:

$$\begin{cases} hx + hy - hz + 2ht = h \\ -4y + 2z + (h-5)t = -2 \\ (1-h)y + \dfrac{(h-1)(h-2)}{2}t = 1-h \end{cases} \overset{h\neq 0,1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}t + 1 \\ y = \dfrac{h-2}{2}t + 1 \\ z = \dfrac{h+1}{2}t + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(hv_1) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}t + 1, \frac{h-2}{2}t + 1, \frac{h+1}{2}t + 1, t \right) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Se $h = 1$, allora il sistema ridotto diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

il che significa che $\rho(A|B) = \rho(A) = 2$, cioè il sistema ammette soluzioni, in particolare $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni:

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ -4y + 2z - 43t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y + 2t - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(v_1) = \{(y, y, 2y + 2t - 1, t) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Infine, se $h = 0$, notiamo che $hv_1 = (0,0,0,0)$, così che $f^{-1}(hv_1) = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,0,3,2),(0,1,-2,-2))$.

3) Dato che $g = f|_V$, possiamo dire che:

$$\begin{aligned} g(v_1) &= f(v_1) = f(e_1) + f(e_2) = 2hv_1 + (h-1)v_3 \\ g(v_2) &= f(v_2) = f(e_3) + f(e_4) = hv_1 + (h-1)v_2 \\ g(v_3) &= f(v_3) = f(e_2) + f(e_3) = -2v_2 + v_3 \end{aligned}$$

così che:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 2h & h & 0 \\ 0 & h-1 & -2 \\ h-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo calcolare il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2h - T & h & 0 \\ 0 & h-1-T & -2 \\ h-1 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = -T^3 + 3hT^2 - (2h^2 + h - 1)T = -T(T - 2h + 1)(T - h - 1).$$

Dunque, gli autovalori sono $0, h+1, 2h-1$. Possiamo, perciò, dire che per $h \neq \frac{1}{2}, -1, 2$ g è semplice, in quanto gli autovalori sono tutti distinti tra loro.

Se $h = \frac{1}{2}$, allora abbiamo 0 con molteplicità $m_0 = 2$ e $\frac{3}{2}$ con molteplicità $m_{\frac{3}{2}} = 1$. g è semplice se $\dim V_0 = 2$:

$$M^{\mathscr{A}}(g) - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -2 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dato che il minore:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

vediamo che $\rho(M^{\mathscr{A}}(g) - 0 \cdot I) = 2$ e che $\dim V_0 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_0$. Questo significa che per $h = \dfrac{1}{2}$ g non è semplice.

Se $h = -1$, gli autovalori sono 0 con $m_0 = 2$ e -3 con $m_{-3} = 1$. g sarà semplice se $\dim V_0 = 2$:

$$M^{\mathscr{A}}(g) - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che il minore:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

vediamo che $\rho(M^{\mathscr{A}}(g) - 0 \cdot I) = 2$ e che $\dim V_0 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_0$. Dunque, se $h = -1$, g non è semplice.

Se $h = 2$, abbiamo 0 con $m_0 = 1$ e 3 con $m_3 = 2$. Dunque, g è semplice se $\dim V_3 = 2$:

$$M^{\mathscr{A}}(g) - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dato che il minore:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

vediamo che $\rho(M^{\mathscr{A}}(g) - 3I) = 2$ e, dunque, $\dim V_3 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_3$. Quindi, anche per $h = 2$ g non è semplice.

4) Se $h = 0$, vediamo che:

$$\begin{aligned} g(1,0,0,1) &= f(1,0,0,1) = f(e_1) + f(e_4) = (0,-2,-1,1) \\ g(0,1,0,-1) &= f(0,1,0,-1) = f(e_2) - f(e_4) = (0,1,0,-1) \\ g(1,1,1,1) &= f(1,1,1,1) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = (0,-1,-2,-1). \end{aligned}$$

Perché $\varphi = g$, deve essere:

$$\begin{aligned} g(1,0,0,1) &= \varphi(1,0,0,1) & &\Rightarrow (0,-2,-1,1) = (k+1, k-1, -1, 1) \\ g(0,1,0,-1) &= \varphi(0,1,0,-1) & &\Rightarrow (0,1,0,-1) = (0, k+2, k+1, -1) \\ g(1,1,1,1) &= \varphi(1,1,1,1) & &\Rightarrow (0,-1,-2,-1) = (0, k, -2, k) \end{aligned}$$

che si verificano se $k = -1$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sono assegnati il piano $\pi\colon x + y + 1 = 0$, il punto $P = (-1, 0, 1) \in \pi$ e la retta r di equazioni:

$$r\colon \begin{cases} x + 3y - 2z + 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Calcolare la retta r' simmetrica di r rispetto al piano π. Detto π_1 il piano contenente r e P e detto π_2 il piano contenente r' e P, calcolare l'angolo individuato da π_1 e π e quello individuato da π_2 e π.

2) Studiare il fascio ϕ di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$\phi\colon x^2 + (k+1)y^2 + (k+1)xy - 2x + 2ky - 4 = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3) Detta Γ la conica del fascio ϕ passante per il punto $(2, -2, 0)$, determinare il cilindro contenente Γ e avente come vertice il punto $V = (1, 1, 1, 0)$. Specificare la natura di tale cilindro.

1) Cominciamo cercando il punto comune a r e π, utilizzando le coordinate omogenee:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \\ x + y + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ t = 0. \end{cases}$$

Questo significa che r e π hanno in comune il punto improprio $(1, -1, -1, 0)$, cioè sono paralleli e $(1, -1, -1, 0)$ è il punto improprio della retta r. La retta r', dunque, sarà la retta parallela a r e passante per il simmetrico di un qualsiasi punto di r.

Prendiamo $Q = (0, 0, 1) \in r$. Vogliamo trovare il simmetrico Q' di Q rispetto a π. Sia s la retta per Q ortogonale a π:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

e calcoliamo $s \cap \pi$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = 1. \end{cases}$$

Quindi il punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ è il punto medio di $Q = (0, 0, 1)$ e di $Q' = (x, y, z)$. Dunque deve essere:

$$\frac{x+0}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{y+0}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{z+1}{2} = 1$$

da cui troviamo che $Q' = (-1, -1, 1)$. Allora la retta r' è la retta passante per Q' e parallela a r, cioè avente come parametri direttori $(1, -1, -1)$:

$$r' : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Cerchiamo ora il piano π_1:

$$\lambda(x + 3y - 2z + 2) + \mu(x + 2y - z + 1) = 0.$$

Imponiamo il passaggio per $P = (-1, 0, 1)$:

$$-\lambda - \mu = 0,$$

da cui troviamo che $\pi_1 \colon y - z + 1 = 0$. Il vettore normale al piano π_1 è dunque il vettore di componenti $(0, 1, -1)$, mentre quello ortogonale a π ha componenti $(1, 1, 0)$. L'angolo α individuato dai due piani è uguale a quello individuato dai due vettori:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Questo vuol dire che $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Per ragioni di simmetria l'angolo β individuato da π_2 e π deve essere uguale ad α e, dunque, è anch'esso uguale a $\frac{\pi}{3}$.

2) La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{k+1}{2} & -1 \\ \dfrac{k+1}{2} & k+1 & k \\ -1 & k & -4 \end{pmatrix}$$

e vediamo che $|B| = -(k+2)^2$. Dunque, otteniamo una prima conica spezzata per $k = -2$. Notiamo, poi, che il fascio può essere scritto nella forma:

$$x^2 + y^2 + xy - 2x - 4 + k(xy + y^2 + 2y) = 0,$$

da cui troviamo che l'altra conica spezzata del fascio è quella nascosta e ha equazione:

$$y(x + y + 2) = 0.$$

Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{k+1}{2} \\ \dfrac{k+1}{2} & k+1 \end{vmatrix} = -\frac{(k+1)(k-3)}{4}.$$

Possiamo, dunque, dire che per $-1 < k < 3$ $|A| > 0$ e abbiamo delle ellissi. Non ci sono circonferenze nel fascio. Per $k = -1$ e $k = 3$ abbiamo $|A| = 0$ e abbiamo delle parabole. Per $k < -1$, $k \neq -2$ e $k > 3$ abbiamo $|A| > 0$ e abbiamo delle iperboli. Notiamo che non ci sono iperboli equilatere, dal momento che $\mathrm{Tr}(A) = 0$ per $k = -2$ e che per $k = -2$ abbiamo una conica spezzata.

Cerchiamo i punti base. Per cercarli intersechiamo la conica spezzata $y(x + y + 2) = 0$ con la conica che si ottiene per $k = -1$:

$$\begin{cases} y(x + y - 2) = 0 \\ x^2 - 2x - 2y - 4 = 0, \end{cases}$$

da cui troviamo i punti $(1 + \sqrt{5}, 0)$, $(1 - \sqrt{5}, 0)$ e $(0, -2)$ contato due volte.

3) Cerchiamo la conica passante per il punto $(2, -2, 0)$:

$$4 + 4(k+1) - 4(k+1) - 4 - 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = -1.$$

Dunque, la conica Γ ha equazione:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2y - 4 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Prendiamo, ora, il generico punto $P = (\alpha, \beta, 0) \in \Gamma$. Questo significa che:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 2\beta - 4 = 0.$$

La retta PV giace sul cilindro e ha equazione:

$$\begin{cases} x = \alpha + t \\ y = \beta + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = z \\ \alpha = x - z \\ \beta = y - z. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $\alpha^2 - 2\alpha - 2\beta - 4 = 0$ troviamo l'equazione del cilindro:

$$(x - z)^2 - 2(x - z) - 2(y - z) - 4 = 0.$$

Dal momento che il cilindro contiene Γ, che è una parabola, concludiamo che il cilindro è parabolico.