CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale -
- Ingegneria Edile-Architettura (A-L),(M-Z)-
Ingegneria delle Telecomunicazioni -
- Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 8 Settembre 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$\begin{aligned} f(1,-1,1) &= (1,-1,1) \\ f(0,1,-1) &= (0,1,-h) \\ f(1,0,1) &= (2,h-1,2) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare l'endomorfismo f al variare del parametro reale h, determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Calcolare $f^{-1}(0,1,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ e sia $i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione identica, definita da $i(v) = v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Sia dato l'endomorfismo $\varphi = f + i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Calcolare $\varphi(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione.

Soluzione

1) Osserviamo che i vettori $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ e $v_3 = (1,0,1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, dal momento che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, essendo il suo determinante pari a 1. Detta $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ la base associata, scriviamo $M^{\mathscr{A}}(f)$. Per fare questo calcoliamo le componenti del generico vettore $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ rispetto ad $\mathscr{A}$:

$$(x,y,z) = a(1,-1,1) + b(0,1,-1) + c(1,0,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = x \\ -a + b = y \\ a - b + c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x - y - z \\ b = x - z \\ c = y + z. \end{cases}$$

Quindi, possiamo dire che $[(x,y,z)]_{\mathscr{A}} = (x-y-z, x-z, y+z)$, da cui segue che:

$$\begin{aligned} [f(1,-1,1)]_{\mathscr{A}} &= [(1,-1,1)]_{\mathscr{A}} = (1,0,0) \\ [f(0,1,-1)]_{\mathscr{A}} &= [(0,1,-h)]_{\mathscr{A}} = (h-1,h,1-h) \\ [f(1,0,1)]_{\mathscr{A}} &= [(2,h-1,2)]_{\mathscr{A}} = (1-h,0,h+1). \end{aligned}$$

Quindi, possiamo scrivere la matrice associata rispetto alla base $\mathscr{A}$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 1-h \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 1-h & h+1 \end{pmatrix}.$$

Si vede che $|M^{\mathscr{A}}(f)| = h(h+1)$. Dunque, se $h \neq 0, -1$, $|M^{\mathscr{A}}(f)| \neq 0$ e f è un isomorfismo, cioè $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 0$. Allora:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che è ridotta di rango 2, per cui $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,0)_{\mathscr{A}}, (-1,0,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1, -v_1 + v_3) = \mathscr{L}(v_1, v_3) = \mathscr{L}((1,-1,1),(1,0,1)).$$

Inoltre $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a - b + c = 0,\ b + c = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (2b, b, -b)\} = \\ = \mathscr{L}((2,1,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((2v_1 + v_2 - v_3)) = \mathscr{L}(1,-1,0). \end{aligned}$$

Se $h = -1$, allora:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,0)_{\mathscr{A}}, (-2,-1,2)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1, -2v_1 - v_2 + 2v_3) = \\ = \mathscr{L}(v_1, -v_2 + 2v_3) = \mathscr{L}((1,-1,1),(2,-1,3)). \end{aligned}$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a - 2b + 2c = 0,\ -b = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-2c, 0, c)\} = \\ = \mathscr{L}((-2,0,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(-2v_1 + v_3) = \mathscr{L}((-1,2,-1)). \end{aligned}$$

2) Dato che $[(0,1,0)]_{\mathscr{A}} = (-1,0,1)$, per calcolare $f^{-1}(0,1,0)$ dobbiamo risolvere questi sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h-1 & 1-h & -1 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 1-h & h+1 & 1 \end{array}\right).$$

Se $h \neq 0, -1$ sappiamo che la matrice incompleta, che è $M^{\mathscr{A}}(f)$, ha rango 3. Di conseguenza, anche la matrice completa avrà rango 3 e il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x + (h-1)y + (1-h)z = -1 \\ hy = 0 \\ (1-h)y + (h+1)z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{h+1} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{h+1}. \end{cases}$$

Dunque, per $h \neq 0, -1$:

$$f^{-1}(0,1,0) = \left\{ \left(-\frac{2}{h+1}, 0, \frac{1}{h+1} \right)_{\mathscr{A}} \right\} = \left\{ -\frac{2}{h+1} v_1 + \frac{1}{h+1} v_3 \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{h+1}, \frac{2}{h+1}, -\frac{1}{h+1} \right) \right\}.$$

Se $h = 0$, allora dobbiamo risolvere il sistema associato alla matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Dato che matrice completa e incompleta hanno rango 2, sappiamo che abbiamo ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ z = 1 - y. \end{cases}$$

Dunque, per $h = 0$:

$$f^{-1}(0,1,0) = \{(2y-2, y, 1-y)_{\mathscr{A}} \in \mathbb{R}^3\} = \\ = \{(2y-2)v_1 + yv_2 + (1-y)v_3 \in \mathbb{R}^3\} = \{(y-1, -y+2, -1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Se $h = -1$, allora dobbiamo risolvere il sistema associato alla matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dunque, la matrice incompleta ha rango 2, mentre quella completa ha rango 3. Questo vuol dire che per $h = -1$ il sistema non ammette soluzioni.

3) Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h-1 & 1-h \\ 0 & h-T & 0 \\ 0 & 1-h & h+1-T \end{vmatrix} = (1-T)(h-T)(h+1-T).$$

Gli autovalori sono $1, h, h+1$. Per $h \neq 0, 1$ sono tutti e tre distinti e possiamo concludere che f è semplice.

Sia $h = 0$. Allora 1 è autovalore con $m_1 = 2$ e 0 è autovalore con $m_0 = 1$. f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che V_1 è il nucleo associato all'endomorfismo avente questa matrice rispetto alla base $\mathscr{A}$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\rho(M^{\mathscr{A}}(f) - I) = 2$ e $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < m_1 = 2$. Quindi, per $h = 0$ possiamo dire che f non è semplice.

Sia $h = 1$. Allora 1 è autovalore con $m_1 = 2$ e 2 è autovalore con $m_2 = 1$. f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che V_1 è il nucleo associato all'endomorfismo avente questa matrice rispetto alla base $\mathscr{A}$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice è ridotta di rango 1, vediamo che $\dim V_1 = 3 - 1 = 2 = m_1$. Quindi, possiamo dire che per $h = 1$ f è semplice.

4) Vediamo che:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\} = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,0,1),(0,1,0)).$$

Dunque, $\varphi(V) = \mathscr{L}(\varphi(1,0,1), \varphi(0,1,0))$. Dato che $\varphi = f + i$, possiamo dire che:

$$\varphi(1,0,1) = f(1,0,1) + i(1,0,1) = (2, h-1, 2) + (1,0,1) = (3, h-1, 3)$$

e che:
$$\varphi(0,1,0) = f(0,1,0) + i(0,1,0) = f(0,1,0) + i(0,1,0).$$
Abbiamo visto che $[(x,y,z)]_{\mathscr{A}} = (x-y-z, x-z, y+z)$, da cui troviamo che $[(0,1,0)_{\mathscr{A}}] = (-1,0,1)$, cioè $(0,1,0) = -v_1 + v_3$. Da questo abbiamo che:

$$f(0,1,0) = -f(v_1) + f(v_3) = -(1,-1,1) + (2,h-1,2) = (1,h,1).$$

Quindi:
$$\varphi(0,1,0) = f(0,1,0) + (0,1,0) = (1,h,1) + (0,1,0) = (1,h+1,1).$$
Possiamo, dunque, dire che $\varphi(V) = \mathscr{L}((3,h-1,3),(1,h+1,1))$. Vediamo quanto vale la dimensione di $\varphi(V)$:
$$\begin{pmatrix} 1 & h+1 & 1 \\ 3 & h-1 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & h+1 & 1 \\ 0 & -2h-4 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, se $-2h-4 \neq 0$, cioè se $h \neq -2$, la matrice ha rango 2 e possiamo dire che $\dim \varphi(V) = 2$. Se $h = -2$, $\dim \varphi(V) = 1$ e $\varphi(V) = \mathscr{L}((1,-1,1))$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dato il piano $\alpha\colon x+y-z=0$ e dato il punto $P=(1,1,0)$, determinare le rette passanti per P che formano con π un angolo di $\frac{\pi}{6}$. Determinare il luogo descritto da queste rette.

2) Determinare l'iperbole del piano $z=0$ tangente alla retta $r\colon x-2y=z=0$ nell'origine e alla retta $s\colon x-2y-2=z=0$ nel punto $(-2,-2,0)$ e passante per il punto $(0,1,0,0)$. Determinare una forma canonica dell'iperbole.

3) Studiare il fascio di quadriche di equazione:
$$2x^2 + ky^2 + 2z^2 - 2xz - 2x + k + 1 = 0,$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) Sia r una retta passante per P e che forma con α un angolo di $\frac{\pi}{6}$. Allora r ha equazioni parametriche:
$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = nt. \end{cases}$$
(l,m,n) sono le componenti di un vettore $\vec{v}$ parallelo a r, mentre $(1,1,-1)$ sono le componenti di un vettore $\vec{n}$ ortogonale ad α. Perché r formi un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con α, $\vec{v}$ e $\vec{n}$ devono formare un angolo di $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, cioè deve essere:
$$\cos\frac{\pi}{3} = \pm\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \pm\frac{l+m-n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3(l^2+m^2+n^2)} = \pm 2(l+m-n) \Rightarrow 3l^2 + 3m^3 + 3n^2 = 4(l+m-n)^2$$
$$\Rightarrow l^2 + m^2 + n^2 + 8lm - 8ln - 8mn = 0.$$
Quindi, le rette cercate sono le rette di equazioni:
$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = nt \end{cases}$$

dove:
$$l^2+m^2+n^2+8lm-8ln-8mn=0.$$

Cerchiamo il luogo descritto dalle rette. Per fare questo ricaviamo l,m,n dalle equazioni della retta r:
$$\begin{cases} l=\dfrac{x-1}{t} \\ m=\dfrac{y-1}{t} \\ n=\dfrac{z}{t}. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $l^2+m^2+n^2+8lm-8ln-8mn=0$ troviamo l'equazione del luogo che stiamo cercando:
$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2+8(x-1)(y-1)-8(x-1)z-8(y-1)z=0.$$

2) Il fascio di coniche tangenti alla retta r in $(0,0)$ e a s nel punto $(-2,-2)$ ha due sole coniche spezzate, quella costituita dall'unione $r\cup s$ e quella di equazione $(x-y)^2=0$, essendo $x-y=0$ l'equazione della retta congiungente i due punti di tangenza. Quindi, il fascio di coniche ha equazione:
$$\lambda(x-2y)(x-2y-2)+\mu(x-y)^2=0.$$

Imponiamo il passaggio per il punto improprio del piano $(0,1,0)$:
$$4\lambda+\mu=0.$$

Allora possiamo porre $\mu=-4$ e $\lambda=1$. In questa maniera vediamo che l'iperbole ottenuta ha equazione:
$$3x^2-4xy+2x-4y=0.$$

Cerchiamo una forma canonica dell'iperbole. La sua matrice associata è:
$$B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $|B|=-4$. Inoltre:
$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-4$$

e
$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 3-T & -2 \\ -2 & -T \end{vmatrix}=T^2-3T-4=(T+1)(T-4).$$

Dunque gli autovalori di A sono -1 e 4, mentre:
$$\gamma=-\frac{|B|}{|A|}=-1.$$

Quindi, una forma canonica dell'iperbole è:
$$-X^2+4Y^2=-1,$$

cioè $X^2-4Y^2=1$.

3) La matrice associata al fascio di quadriche è:
$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

e vediamo che $|B| = k(3k+1)$, mentre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & k & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3k.$$

Per $k = 0$, dunque, $|B| = 0$ e $|A| = 0$. Questo significa che per $k = 0$ abbiamo un cilindro o una quadrica spezzata. Vediamo quanto vale il rango di B in questo caso:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che quest'ultima matrice è ridotta di rango 3, vediamo che $\rho(B) = 3$ e che, dunque, la quadrica è un cilindro per $k = 0$.

Per $k = -\frac{1}{3}$ vediamo che $|B| = 0$ e che $|A| \neq 0$. In tal caso abbiamo un cono.

Per $k < -\frac{1}{3}$ e per $k > 0$ vediamo che $|B| > 0$ e che $|A| \neq 0$. Questo significa che in tal caso abbiamo un iperboloide iperbolico.

Se $-\frac{1}{3} < k < 0$ vediamo che $|B| < 0$ e che $|A| \neq 0$. In questo caso abbiamo un iperboloide ellittico o un ellissoide. Per vedere quale dei due casi si verifica dobbiamo guardare gli autovalori del polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 0 & -1 \\ 0 & k-T & 0 \\ -1 & 0 & 2-T \end{vmatrix} = (k-T)(T-1)(T-3).$$

Gli autovalori di A, dunque, sono $k, 1, 3$ e per $k < 0$ sono di segni distinti. Possiamo, perciò, concludere che per $-\frac{1}{3} < k < 0$ abbiamo un iperboloide ellittico.