FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 10/09/2009

I

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha il vettore $v_1 = (1,1,1)$ come autovettore associato all' autovalore $T_1 = h+2$ e che assegna $f(0,1,0) = (-1,h,-1)$ e $f(0,0,1) = (-1,-1,h+4)$.

1. Studiare l'applicazione f, al variare di h, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Studiare la semplicità dell' endomorfismo, al variare di h.
3. Determinare, al variare di h, il sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $f(V) \subseteq W$, dove $W = \{(y_1, y_2, y_3) | y_1 - y_2 = 0\}$.
4. Detta $A = M^{E,E}(f)$, con E base canonica di $\mathbb{R}^3$, diagonalizzare A, ove possibile, e trovare la matrice diagonalizzante.

Risoluzione

Dalla definizione segue subito che $f(1,1,1) = (h+2)(1,1,1) = (h+2,h+2,h+2)$. È facile calcolare $f(e_1) = f(1,0,0)$ per differenza; si trova $f(1,0,0) = (h+4,3,-1)$. Quindi la matrice associata $M^{E,E}(f)$ rispetto alle basi canoniche è $M^{E,E}(f) = A = \begin{pmatrix} h+4 & -1 & -1 \\ 3 & h & -1 \\ -1 & -1 & h+4 \end{pmatrix}$.
In effetti è anche utile calcolare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, e_2, e_3\}$, perché è noto che quando si conosce un autovettore è sempre bene rappresentare la matrice rispetto ad una base che contenga gli autovettori; ciò permetterà di ottenere una matrice più semplice.
Detto (a,b,c) il generico vettore di $\mathbb{R}^3$ le sue componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ si trovano facilmente.
$(a,b,c) = x(1,1,1) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$. Si trova facilmente $x = a; y = b-a; z = c-a$.
Per cui la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = B = \begin{pmatrix} h+2 & -1 & -1 \\ 0 & h+1 & 0 \\ 0 & 0 & h+4 \end{pmatrix}$.
Fatte queste premesse è facile rispondere alle varie domande.

1. La matrice B è ridotta ed ha rango 3 par $h \neq -2, -1, -4$. Per tali valori di h, f è un isomorfismo.
   a) Per $h = -2$ la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La seconda e la terza colonna di B danno le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ di una base dell' immagine. Il $ker(f)$ si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo costruito su B. Si trova la soluzione $(1,0,0)$, a meno di un fattore di proporzionalità. Il nucleo è quindi $v_1 = (1,1,1)$.
   b) Per $h = -1$ la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La prima e la terza colonna danno le componenti di una base dell' immagine. Si trova v_1 e $v_1 - 3e_3$. Il $ker(f)$ ha componenti $(1,1,0)$ e quindi è $v_1 + e_2$.
   c) In modo analogo si lavora per $h = -4$.

2. Sempre partendo dalla matrice B si trova la matrice caratteristica
$(B-TI) = \begin{pmatrix} (h+2)-T & -1 & -1 \\ 0 & (h+1)-T & 0 \\ 0 & 0 & (h+4)-T \end{pmatrix}$.
Gli autovalori sono $T_1 = h+2; T_2 = h+1; T_3 = h+4$. Tali autovalori sono sempre reali e distinti e quindi l'endomorfismo è sempre semplice.

3. Per rispondere a tale domanda è preferibile usare la matrice A. Diciamo (x, y, z) il generico vettore di $\mathbb{R}^3$. Per trovare $f(x, y, z)$ usiamo la matrice A come operatore; quindi calcoliamo $A\underline{X} = \underline{Y}$. Si trova $y_1 = (h+4)x-y-z$; $y_2 = 3x+hy-z$; $y_3 = -x-y+(h+4)z$. Imponendo la condizione $y_1 - y_2 = 0$ si ha $(h+4)x - y - z - 3x - hy + z = 0$. Da cui $(h+1)x - (h+1)y = 0$. E quindi la controimmagine è tutto $\mathbb{R}^3$ per $h = -1$; per $h \neq -1$ si ha $x = y$ e z arbitrario. Quindi il generico vettore della controimmagine è (x, x, z). Una base per V è $(1, 1, 0)$; $((0, 0, 1)$.

4. Per diagonalizzare A bisogna calcolare gli autovettori. Intanto la matrice è sempre diagonalizzabile, per ogni valore di h, perché l' endomorfismo è sempre semplice.
Per $T_1 = h+2$ un autovettore associato è $v_1 = (1, 1, 1)$, per definizione.
Per $T_2 = h+1$ la matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. E quindi gli autovettori hanno componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, $(x, x, 0)$. Quindi come autovettore associato a T_2 si prende $v_1 + e_2 = (1, 2, 1)$.
Infine per $T_3 = h+4$ la matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Gli autovettori hanno componenti $(x, 0, -2x)$. Quindi come autovettore si può scegliere $v_1 - 2e_3 = (1, 1, -1)$. In definitiva si ha $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}\{h+2, h+1, h+4\}$, dove $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonalizzante.

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

1. Trovare l' equazione del fascio di parabole del piano $z = 0$ aventi asse di simmetria la retta $x - y = 0$ e il vertice $V = (1, 1)$.
2. Determinare il fuoco e la relativa direttrice della generica parabola del fascio.
3. Trovare la parabola $\wp$ del fascio tangente agli assi coordinati $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Si determini una sua forma canonica ed il cambiamento di coordinate che la determina.
4. Trovare l' equazione del paraboloide ellittico ottenuto facendo ruotare $\wp$ attorno al proprio asse di simmetria.
(Suggerimento). Si faccia ruotare la parabola ottenuta in 3. e si applichi poi il cambiamento di coordinate.

Risoluzione

1. Nel piano $z = 0$ la tangente nel vertice ha equazione $x + y - 2 = 0$. Quindi il fascio si può pensare come fascio di coniche bitangenti alla tangente nel vertice e alla retta impropria; la congiungente i punti di contatto è la retta $x - y = 0$. Scriviamo l'equazione del fascio
$$(x-y)^2 + \lambda(x+y-2) = 0$$

2. Il cambiamento di coordinate che porta alla forma canonica del tipo $Y^2 = 2pX$ è la rototraslazione (1) $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)+1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)+1 \end{cases}$. Sostituendo si trova l' equazione canonica
$$\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(-2Y)\Big)^2 + \lambda(\frac{\sqrt{2}}{2}(2X) + 2 - 2) = 0$$

cioè $Y^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda X$. Intersecando la retta $x = y$ e la circonferenza con centro in $V = (1, 1)$ e raggio $R = \frac{p}{2}$ si trovano i due punti F e D: uno è il fuoco e l'altro il punto comune alla direttrice e all' asse di simmetria. Nel nostro caso $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\lambda$. Si fa sistema fra la retta $x = y$ e la circonferenza $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{32}\lambda^2$. Da cui $(x-1)^2 = \frac{1}{64}\lambda^2$. Cioè $x = 1 \pm \frac{1}{8}\lambda$.

3. Imponendo che la generica parabola del fascio sia tangente all' asse delle $\vec{x}$ si ha: dalla risolvente $x^2 + \lambda x - 2\lambda = 0$, $\Delta = \lambda^2 + 8\lambda = 0$. Quindi l' equazione della parabola $\wp$ è $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$, ottenuta per $\lambda = -8$. Tenendo conto di quanto detto in 2. un' equazione canonica è $Y^2 = 4\sqrt{2}X$. Le formule della rototraslazione sono ovviamente le (1).

4. Si prenda un punto generico $G = (X, Y, 0)$ della parabola. La sua distanza dall'asse di simmetria (e quindi dal punto $G_0 = (X, 0, 0)$) è $|Y|$. Si prenda nello spazio un punto $P = (X, Y', Z')$ appartente alla superficie di rotazione richiesta, avente la stessa prima coordinata di G. Esso appartiene alla circonferenza di centro G_0 e raggio $|Y|$. I punti della superficie di rotazione richiesta sono caratterizzati dall' avere uguale distanza dall' asse di rotazione. Quindi $PG_0 = GG_0$; cioè $Y^2 = Y'^2 + Z'^2$. Per trovare la superficie di rotazione basta sostituire nell' equazione della parabola a Y^2 il valore $Y^2 + Z^2$. Si ottiene la (2) $Y^2 + Z^2 = 4\sqrt{2}X$.
Si potrebbe arrivare alla stesso risultato considerando la nostra superficie come luogo di circonferenze con centro sull' asse di rotazione (asse $\vec{x}$). A questo punto basta sostituire le inverse delle (1) per trovare l' equazione richiesta.