FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 15/07/2009

I

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha come matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0);\ v_2 = (0,1,-1);\ v_3 = (0,0,1)\}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$ la matrice

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & h+1 \\ -1 & -1 & h+1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix}$$

1. Studiare l'applicazione f, al variare di h, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Dopo aver trovato la matrice $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ studiare la semplicità di f, al variare di h, e trovare una base di autovettori quando f non è un isomorfismo.
3. Determinare, al variare di h, il sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $f(V) \subseteq W$, dove $W = \{(y_1, y_2, y_3) | y_1 = y_2 = 0\}$.
   Qual'è il valore di h per cui $V = \mathcal{L}(e_3)$?

Risoluzione

1. Per studiare l'applicazione lineare si può usare la matrice $M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & h+1 \\ -1 & -1 & h+1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix}$.
   Riducendo per righe si ottiene facilmente la matrice ridotta $\begin{pmatrix} -1 & -2 & h+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$.
   Per $h \neq 0$ si ha un isomorfismo.
   Per $h = 0$ la nostra matrice diventa $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi la dimensione dell' immagine è due e una base dell' immagine è data dalle prime due colonne C_1 e C_2 della matrice. Per il nucleo si ha $x = z$ e $y = 0$, e quindi $(1,0,1)_{\mathcal{B}}$ danno le componenti di una base del nucleo.

2. Per studiare la semplicità di f bisogna trovare una matrice associata ad f rispetto alla stessa base sia nel dominio che nel codominio. Troviamo la matrice $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$. Si devono scrivere sulle colonne le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, delle immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$.
   Intanto troviamo le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, del generico vettore (a, b, c).
   Scriviamo $(a, b, c) = x(1,1,0)+y(0,1,-1)+z(0,0,1)$. Si deduce il sistema $\begin{cases} x & = & a \\ x+y & = & b \\ -y+z & = & c \end{cases}$.
   Da questo si deducono le componenti cercate: $x = a;\ y = b-a;\ z = b-a+c$. Tenuto conto del significato della matrice $M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$, si trova che $f(v_1) = (-1,-1,0)$. E quindi $[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = (-1,0,0)$, che è la prima colonna della matrice cercata A. E così via.
   La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & h+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$.

La matrice caratteristica è $A = \begin{pmatrix} -1-T & -2 & h+1 \\ 0 & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & h-T \end{pmatrix}$ e gli autovalori sono $T_1 = -1;\ T_2 = 1;\ T_3 = h$.
Per $h \neq \pm -1$ gli autovalori sono reali e distinti e quindi l' endomorfismo è semplice.
Per $h = -1$ si ha $T_1 = T_3 = -1$; la matrice caratteristica per questi valori diventa $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; essa ha rango 1 e quindi $\dim V_{-1} = 3 - 1 = 2$, cioè la molteplicità geometrice è uguale alla molteplicità algebrica. Ne segue che l' endomorfismo è semplice.
Per $h = 1$ si ha $T_2 = T_3 = 1$. Anche in questo caso l' endomorfismo è semplice.
Il nostro endomorfismo non è un isomorfismo per $h = 0$. Semplici calcoli permettono di trovare in tal caso una bse di autovettori.

3. Siano (x, y, z) le componenti di un vettore generico $v \in \mathbb{R}^3$. Usando la matrice $M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$ si trovano le componenti del vettore immagine. Si trova il vettore $\begin{pmatrix} y_1 = -x - 2y + (h+1)z \\ y_2 = -x - y + (h+1)z \\ y_3 = -y + hz \end{pmatrix}$.
   Imponendo che sia $y_1 = y_2 = 0$ si deduce il sistema $\begin{cases} -x - 2y + (h+1)z = 0 \\ -x - y + (h+1)z = 0 \end{cases}$, da cui si ha $\begin{cases} y = 0 \\ x = (h+1)z \end{cases}$. Quindi il sottospazio V cercato è dato dal generico vettore $((h+1)z, 0, z)$.
   Se si vuole ottenere $V = \mathcal{L}(e_3)$ basta porre $h = -1$.

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$
Siano r ed s le rette di equazioni $r : x - 1 = y = 0$ ed $s : x = y - 2 = 0$.

1. Scrivere le equazioni del luogo Γ dei punti P del piano $\vec{x}\vec{y}$ tali che

$$d(P, r) + d(P, s) = 1$$

2. Si studi la conica del piano $z = 0$ di equazione

$$3y^2 - 4xy + 4x - 4y = 0$$

   determinando una sua forma canonica e il cambiamento di coordinate che l' ha determinata.

3. Fra le quadriche contenenti Γ si considerino quelle passanti per $Z_\infty = (0, 0, 1, 0)$ ed aventi in tale punto $x + y = 0$ come piano tangente.
   Studiare il fascio delle quadriche trovate.

Risoluzione

1. Sia $P = (\alpha, \beta, 0)$ il generico punto del piano $\vec{x}\vec{y}$. Visto che le rette r ed s sono entrambe perpendicolari al piano $\vec{x}\vec{y}$ è facile calcolare le distanze di P da r ed s. In effetti bisogna calcolare la distanza di P dai punti $H_1 = (1, 0, 0)$ ed $H_2 = (0, 2, 0)$ in cui r ed s incontrano il piano $z = 0$. Imponendo che sia verificata la condizione del testo si ha

$$\sqrt{(\alpha - 1)^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + (\beta - 2)^2} = 1$$

   Quadrando ambo i membri e semplificando si ottiene che il nostro luogo Γ è dato da $\begin{cases} z = 0 \\ 3y^2 - 4xy + 4x - 4y = 0 \end{cases}$. Evidentemente è una conica dello spazio.

2. La matrice B della conica è $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Si ha subito $|B| = 4$ e $|A| = -4$. La nostra conica è una iperbole il cui centro di simmetria è il punto $C = (\frac{1}{2}, 1, 0)$. Gli autovalori della matrice A sono: $\alpha = 4$ e $\beta = -1$. Calcoliamo γ col metodo degli invarianti ortogonali. $-\alpha\beta\gamma = 4$ e $\alpha\beta = -4$; da cui si ha $\gamma = 1$. Quindi una equazione canonica è : $4X^2 - Y^2 = 4$. L'autospazio associato all' autovalore $\alpha = 4$ è $y = -2x$ e l'autospazio asociato all'autovalore $\beta = -1$ è $x - 2y = 0$. Orientiamo gli assi di simmetria in modo che il versore $\underline{I} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ e il versore $\underline{J} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$. In definitiva il cambiamento di coordinate che determina la nostra forma canonica è dato dalla matrice della rototraslazione $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se si vuole rappresentare graficamente la conica è bene ricordare che le rette $y = 1$ e $y = \frac{3}{4}x$ sono asintoti della iperbole. Lo studenti provi a fare il grafico.

3. Tutte e sole le quadriche conteneti la conica Γ sono quelle la cui equazione è del tipo

$$z(ax + by + cz + d) + 3y^2 - 4xy + 4x - 4y = 0$$

Scrivendo tale equazione in coordinate omogenee e imponendo il passaggio per il punto $Z_\infty = (0, 0, 1, 0)$ si trova che dev' essere $c = 0$. Il piano tangente in questo punto ha equazione $ax + by + d = 0$; perché tale equazione rappresenti lo stesso piano dell' equazione $x + y = 0$ dev'essere $d = 0; b = a$. Quindi la generica equazione delle quadriche cercate è

$$axz + ayz + 3y^2 - 4xy + 4x - 4y = 0$$

.

Si vede subito che la matrice della quadrica generica è $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{a}{2} & 2 \\ -2 & 3 & \frac{a}{2} & -2 \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Semplici calcoli dicono che $|B| = 4a^2$ e che $|A| = -\frac{7}{4}a^2$. Se ne conclude che per $a = 0$ si ha un cilindro iperbolico; mentre per $a \neq 0$ si hanno sempre iperboloidi iperbolici.