CdL in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria**- 22 Febbraio 2010

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2,2}$ si consideri il sottoinsieme:

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \colon {}^{t}A = A, \operatorname{Tr}(A) = 0\}.$$

1) Dopo avere verificato che V è sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$, determinare la sua dimensione e una base.

2) Determinare il generico endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ tale che:

   1. $\operatorname{Ker} f = V$;
   2. $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$;
   3. la matrice identica sia autovettore associato all'autovalore 2.

3) Studiare la semplicità del generico endomorfismo f e determinare una base di autovettori dell'endomorfismo avente due autospazi di dimensione 2.

4) Posto $g\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ l'endomorfismo così definito:

$$g\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare una matrice associata a $g \circ f$.

Risoluzione

1. Il sottospazio V è costituito dalle matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Quindi la dimensione di V è due e una base di tale sottospazio è data dalle matrici $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Una applicazione lineare è perfettamente determinata assegnando le immagini dei vettori di una base. Bisogna quindi scegliere una base $\mathcal{B}$ nel dominio $\mathbb{R}^{2,2}$. In base ai dati si vede subito che la base $\mathcal{B}$ piu conveniente è costituita dalle matrici M_1, M_2, che stanno nel nucleo, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, perché è un autovettore associato all'autovalore 2 e $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, che è indipendente dai precedenti ed è un generatore dell'immagine.
   Quindi è chiaro che:

$$f(M_1) = \underline{0}; \quad f(M_2) = \underline{0}; \quad f(M_3) = 2M_3; \quad f(M_4) = aM_3 + bM_4.$$

   Nello scrivere la matrice associata ad f, ricordiamo che le componenti della matrice nulla, rispetto a qualunque base, sono tutte nulle. È quindi facile scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in entrambi gli spazi $\mathbb{R}^{2,2}$. Si ha

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

   Osserviamo che perché siano rispettate le ipotesi poste dal problema deve essere $b \neq 0$, altrimenti l'immagine sarebbe di dimensione uno e non due.

3. Gli autovalori sono $T_1 = T_2 = 0$; $T_3 = 2$; $T_4 = b$. Si devono esaminare due possiblità:
   a) Se $b \neq 2$, allora l'autovalore $T = 0$ è doppio.
   Dalla matrice caratteristica $(*)$ $\begin{pmatrix} -T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-T & a \\ 0 & 0 & 0 & b-T \end{pmatrix}$, si calcola il rango della matrice per $T = 0$; si ha che il rango della matrice è 2 e quindi la dim $V_0 = 4 - 2 = m_0$. In tal caso l'endomorfismo è semplice, perché gli altri autovalori sono reali e distinti.

   a) Per b=2, si hanno due autovalori doppi: $T = 0$; $T = 2$. In tal caso per la semplicità si deve porre $a = 0$, perché ponendo $T = 2$ nella (*) si deve avere rango della matrice uguale a 2. Inoltre è facile dedurre che una base di autovettori è costituita dalla base $\mathcal{B}$.

4. Come è noto la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è data dal prodotto delle matrici associate alle singole applicazioni, purché ciò venga fatto compatibilmente con le scelte delle basi. È quindi necessario effettuare un cambiamento di base. Noi abbiamo il prodotto di applicazioni:
$$\mathbb{R}^{2,2}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{2,2}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^{2,2}_{\mathcal{E}}$$
   dove in basso si sono indicate le basi scelte nei relativi spazi. Con $\mathcal{E}$ si indica la base usuale di $\mathbb{R}^{2,2}$. Diciamo $\mathcal{C}$ la base di $\mathbb{R}^{2,2}$ costituita dalle matrici:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   È facile vedere che le componenti della generica matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, rispetto alla base $\mathcal{C}$, sono rispettivamente $x = a$; $y = b - a$; $z = c - b$; $t = d - c$. Da ciò si deduce che la matrice associata $M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(g)$ è data da
$$M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Effettuando il prodotto delle matrici $M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(g) \cdot M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, che è la matrice che risolve il nostro problema.
   A titolo di esempio calcoliamo in dettaglio la prima colonna della matrice $M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(g)$. Dobbiamo trovare le componenti, rispetto alla base $\mathcal{E}$, dell'immagine $g(M_1)$. Ma dal testo noi conosciamo i valori della g calcolati sui vettori della base $\mathcal{C}$.
   Ma $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Quindi
$$g(M_1) = g\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   E così via.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Detta r la generica retta per O, determinare il piano π passante per $A = (1, 0, 0)$ e perpendicolare a r.

2) Determinare la quadrica Q luogo dei punti $P = \pi \cap r$ al variare di r.

3) Verificare che la sezione Γ di Q con il piano $\pi\colon x - y + z = 0$ è una circonferenza reale e determinare il suo centro e il suo raggio.

4) Detta Γ' la proiezione ortogonale di Γ sul piano $y = 0$, determinare e studiare la generica quadrica contenente Γ e Γ'.

Risoluzione

1. Le equazioni della retta generica per O sono $x = mz$; $y = nz$. I parametri direttori sono $(m, n, 1)$. Il piano π passante per A e perpendicolare alla retta generica ha equazione: $m(x-1) + ny + z = 0$.

2. Per troavre il luogo dei punti comuni alla retta e al piano si fa sistema fra le loro equazioni. Quindi $\begin{cases} x = mz \\ y = nz \\ m(x-1) + ny + z = 0 \end{cases}$. La quadrica luogo Q si ottiene eliminando i parametri m ed n dal sistema. Si ottiene la sfera di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - x = 0$. Tale sfera ha centro $C = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ e raggio $R = \frac{1}{2}$.

3. Ovviamente, secando una sfera con un piano si ottiene una circonferenza reale se la distanza del centro della sfera dal piano è minore del raggio della sfera. La distanza del punto C dal piano $x - y + z = 0$ è: $d = \frac{1}{2\sqrt{3}} < R = \frac{1}{2}$. Per trovare il centro C' della circonferenza basta trovare il punto di intersezione del piano $x - y + z = 0$ con la retta per C perpendicolare al piano. Si trova $C' = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$. Il raggio r della circonferenza sezione si calcola col teorema di Pitagora. Si ha $R^2 = d^2 + r^2$, da cui $r = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

4. Come è noto la proiezione ortogonale di Γ sul piano $y = 0$ si trova secando $y = 0$ con l'equazione del cilindro che si ottiene eliminando la y dal sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - x = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. La conica Γ' ha equazioni $\begin{cases} 2x^2 + 2xz + 2z^2 - x = 0 \\ y = 0 = 0 \end{cases}$.
La più generale quadrica contenete Γ ha equazione

$$(x - y + z)(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 + z^2 - x = 0.$$

Secando questa con $y = 0$ ed imponendo di contenere Γ' si ottengono le condizioni: $a = 1$; $b = b$; $c = 1$; $d = 0$. Quindi la generica quadrica cercata ha equazione:

$$2x^2 + (b-1)xy + (1-b)y^2 + 2z^2 + 2xz + (b-1)yz - x = 0.$$

Con semplici calcoli si trova $|B| = \frac{1}{16}(b^2 + 6b - 7)$ e $|A| = \frac{(b-1)}{2}(b+5)$.

- Per $b = 1$ si ha un cilindro.
- Per $b = -5$ si ha un paraboloide ellittico.
- Per $b = -7$ si ha un cono.
- Per $b < -7, b > 1$ si hanno iperboloidi iperbolici.
- Per $-7 < b < 1$ si hanno iperboloidi ellittici; escluso il caso $b = -5$ già esaminato.