FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 26/01/2010

I

In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:

$$v_1 = (1, 1, 1); \quad v_2 = (0, 1, 1); \quad v_3 = (1, 1, 0) \;\text{ e }\; v_4 = (1, -1, 1)$$

1. Sapendo che v_1, v_2 e v_3 sono autovettori di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, determinare i rispettivi autovalori tenendo conto che $f(v_4) = (h, 1, -h)$.

2. Tenuto conto che gli autovalori determinati al numero precedente sono $\lambda_1 = \frac{-1}{3}$; $\lambda_2 = \frac{h-1}{2}$; $\lambda_3 = \frac{-(h+1)}{2}$, studiare al variare di h l'applicazione lineare f determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.

3. Detto $V = \mathcal{L}(v_1, v_4)$ trovare il valore di h per cui $f_{|V}$ induca un endomorfismo $f' : V \to V$. Diagonalizzare $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f')$, con $\mathcal{B} = \{v_1, v_4\}$, indicando la matrice diagonalizzante.

4. Trovare, al variare di h, la controimmagine $f^{-1}(W)$, con $W = \mathcal{L}(v_2, v_4)$.

Risoluzione

1. Per l' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sarà $f(v_1) = \lambda_1 v_1$; $f(v_2) = \lambda_2 v_2$; $f(v_3) = \lambda_3 v_3$. D'altro canto v_1; v_2; v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$ e quindi il vettore v_4 si può scrivere come combinazione lineare dei vettori della base. Si trova $v_4 = 3v_1 - 2v_2 - 2v_3$. Per cui $f(v_4) = 3f(v_1) - 2f(v_2) - 2f(v_3) = 3(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) - 2(0, \lambda_2, \lambda_2) - 2(\lambda_3, \lambda_3, 0) = (3\lambda_1 - 2\lambda_3, 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3, 3\lambda_1 - 2\lambda_2)$. D'altra parte $f(v_4) = (h, 1, -h)$ e quindi identificando i valori si ha il sistema:
$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 2\lambda_3 = h \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = -h \end{cases}$$
Risolvendo tale sistema si ha la soluzione:
$$\lambda_1 = \frac{-1}{3}; \; \lambda_2 = \frac{h-1}{2}; \; \lambda_3 = \frac{-(h+1)}{2}$$
Diciamo $\mathcal{A} = \{v_1, \; v_2, \; v_3\}$ la base di autovettori e quindi si ha la matrice:
$$A = M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(h+1)}{2} \end{pmatrix}.$$

2. La matrice A è ridotta per righe.
Per $h \neq \pm 1$ si ha un isomorfismo.
Per $h = 1$ la matrice diventa $A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; essa ha rango 2, quindi $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ e una sua base è data da $\{v_1, \; v_3\}$; il nucleo è $\ker(f) = \mathcal{L}(v_2)$.
Similmente per $h = -1$. $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ e $\ker(f) = \mathcal{L}(v_3)$.

3. Essendo v_1 un autovettore si ha $f(v_1) = \lambda_1 v_1 \in V$. Sappiamo che $f(v_4) = (h, 1, -h)$ e perché appartenga a $V = \{(x, y, z) | x = z\}$ deve essere $h = -h$, cioè $h = 0$. Troviamo le componenti di $f(v_4) = (0, 1, 0)$, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, \; v_4\}$. Si scrive $f(v_4) = (0, 1, 0) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1)$; si trova $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{-1}{2}$. Per cui la matrice associata

a f' rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f') = B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Gli autovalori di B sono $\lambda'_1 = \frac{-1}{3}$; $\lambda'_2 = \frac{-1}{2}$. Dalla matrice caratteristica $(A - TI) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} - T & \frac{1}{2} - T \\ 0 & \frac{-1}{2} - T \end{pmatrix}$ si trova l'autospazio associato all' autovalore $\lambda'_2 = \frac{-1}{2}$. Si risolve $(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2})x + \frac{1}{2}y = 0$. Si trova a meno di un fattore di proporzionalità $(1, \frac{-1}{3})$ che sono le componenti di un autovettore associato a λ'_2 rispetto alla base $\mathcal{B}$. Quindi la matrice diagonalizzante sarà $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$. Nella prima colonna della matrice ci sono le componenti dell' autovettore v_1 rispetto alla base $\mathcal{B}$. Con un semplice calcolo si trova che $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. E' facile provare che

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Se si vuole utilizzare la matrice A si devono trovare le relazioni cartesiane che definiscono il sottospazio W con componenti dei vettori rispetto alla base $\mathcal{A}$.
   Per un vettore generico (a, b, c) le sue componenti rispetto alla base $\mathcal{A}$ sono $x = a - b + c; y = b - a; z = b - c$. Quindi le componenti di v_2 e v_4 sono $[v_2]_{\mathcal{A}} = (0, 1, 0)$ e $[v_4]_{\mathcal{A}} = (3, -2, -2)$. Quindi il sottospazio W si può pensare come il sottospazio dei vettori w le cui componenti (x, y, z) soddisfano $2x + 3z = 0$. Ciò si ottiene dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ imponendo che il rango si mantenga 2.
   Detto quindi v un qualunque vettore della controimmagine e (x, y, z) le sue componenti rispetto alla base $\mathcal{A}$ si ha $A\underline{X} = B$, con B vettore colonna delle componenti dell'immagine. Quindi le componenti dell' immagine sono $((\frac{-1}{3})x, (\frac{h-1}{2})y, (\frac{-(h+1)}{2})z)$. Noi vogliamo che queste verifichino la relazione $2x + 3y = 0$. Quindi dev'essere $2(\frac{-1}{3})x + 3(\frac{-(h+1)}{2})z = 0$. Quindi la controimmagine è sempre un sottospazio di dimensione 2, per ogni h.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

Si considerino le rette

$$r \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad s \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \quad \begin{cases} z - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

1. Detto G un punto generico di r, si determini e si studi la quadrica Q luogo delle rette g passanti per G e complanari ad s e t.

2. Determinare tutte le possibili sezioni piane di Q.

3. Studiare in particolare la sezione Γ di Q col piano $x + y + z + 1 = 0$ e ridurre a forma canonica la proiezione ortogonale di Γ sul piano $z = 0$.

4. Trovare i sistemi di rette su Q.

Risoluzione

1. Sia $G = (\alpha, -\alpha, \gamma, 0)$ un punto generico della retta r. Troviamo il piano π_1 contenente s e passante per G. Dal fascio $x - t + kz + 0$, imponendo il passaggio per G si ha: $\pi_1 : \gamma(x - 1) - \alpha z = 0$ e dal fascio $z - t + ky = 0$, imponendo il passaggio per G si ha $\pi_2 : \alpha(z - t) + \gamma y = 0$. Intersecando i due piani π_1 e π_2 si ottiene la generica retta per G complanare a s e t. Eliminando dal sistema i parametri α e γ si ottiene l' equazione della quadrica $Q :\ xz + yz = x + z - 1$. Tale quadrica è un paraboloide iperbolico.

2. Le sezioni con i piani tangenti sono tutte e sole quelle che secano Q in una conica spezzata. Per classificare le sezioni piane che danno coniche irriducibili si deve studiare la natura dei punti impropri della conica sezione; ciò equivale a studiare il comportamento della retta impropria del piano secante rispetto alla conica all'infinito.
   Tale C_∞ è data da $\begin{cases} t=0 \\ z(x+y)=0 \end{cases}$. Il punto comune alle due rette è $P=(1,-1,0,0)$. Il generico piano passante per P ha equazione $a(x+y)+cz+dt=0$. Quindi tutti i piani del tipo precedente, che non appartengono ai due fasci aventi per assi le due rette in cui si spezza la C_∞, secano Q in parabole. Quindi dovrà essere: $a\neq 0$ e $c\neq 0$.
   Tutti gli altri piani secano Q in iperboli.

3. Il piano $x+y+z+t=0$ passa per P e non fa parte dei due fasci precedenti. Quindi seca Q in una parabola. Per trovare la proiezione ortogonale sul piano $z=0$ bisogna eliminare la z dal sistema e secare col piano $z=0$. Dopo semplici calcoli si ottiene: $\begin{cases} z=0 \\ x^2+2xy+y^2+x-2=0 \end{cases}$, che è la conica proiezione.
   La matrice della conica è $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Si ha una parabola e quindi una forma canonica del tipo $\beta Y^2=2\gamma X$. Calcoliamo il polinomio caratteristico della sottomatrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si trova $(1-T)^2-1=0$ e quindi gli autovalori $\alpha=0$; $\quad \beta=2$. L'autospazio V_α è $x+y=0$ e V_β è $x-y=0$.
   $|B|=-\frac{1}{4}$ e quindi $-\beta\gamma^2=-\frac{1}{4}$, da cui $\gamma^2=\frac{1}{8}$. Orientiamo l'asse $\vec{X}$ scegliendo il versore $\underline{I}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$. La matrice P della rotazione è data da $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Troviamo il vertice della parabola. Il punto improrprio della parabola è $(1,-1,0)$ e quello in direzione ortogonale è $(1,1,0$. La polare di tale punto da' l' asse di simmetria della parabola. Dopo semplici calcoli si ottiene $4x+4y+1=0$. Intersecando la parabola con l' asse di simmetria si trova il vertice, che è il punto $V=(\frac{31}{16},-\frac{27}{4})$. Dall' orientamento scelto per gli assi e dalla posizione della parabola nel riferimento iniziale, si trova la forma canonica: $Y^2=-\frac{1}{2\sqrt{2}}X^2$. Ovviamente la matrice della rototraslazione è $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{31}{16} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{27}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Dall'equazione della quadrica: $(x+y)z=x+z-1$ si deducono facilmente le equazioni dei due sistemi di rette sulla quadrica:

$$I)\quad \begin{cases} \lambda z=\mu(x+z-1) \\ \mu(x+y)=\lambda \end{cases} \qquad II)\begin{cases} \lambda' z=\mu' \\ \mu'(x+y)=\lambda'(x+z-1) \end{cases}.$$