FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegenria Edile Architettura e Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** assegnata il 9/09/05

I

a) Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u.$

Si consideri nel piano $z = 0$ il fascio di coniche tangenti alla retta $x + y + 2 = 0$ nel punto $A = (-1, -1)$, e passanti per $B = (0, -1)$ e $C = (-1, 0)$.

1. Caratterizzare le coniche del fascio.
2. Dopo aver trovato la conica γ del fascio avente l'origine O del riferimento come centro di simmetria, trovare una sua forma canonica ed il relativo cambiamento di coordinate.
3. Trovare il cono di vertice $V = (1, -1, -1)$ e direttrice γ.

Risoluzione

1. Il fascio si puo' individuare mediante le coniche spezzate nelle rette $AB \cdot AC$ e nella tangente $x + y + 2 = 0$ moltiplicata la retta BC. Quindi l' equazione del fascio è

$$(x + y + 2)(x + y + 1) + \lambda(x + 1)(y + 1) = 0$$

Sviluppando l' equazione si ha

$$x^2 + y^2 + (\lambda + 2)xy + (\lambda + 3)x + (\lambda + 3)y + \lambda + 2 = 0$$

La matrice della conica è $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda+2}{2} & \frac{\lambda+3}{2} \\ \frac{\lambda+2}{2} & 1 & \frac{\lambda+3}{2} \\ \frac{\lambda+3}{2} & \frac{\lambda+3}{2} & \lambda + 2 \end{pmatrix}$. La sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda+2}{2} \\ \frac{\lambda+2}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Ovviamente non ha senso andare a calcolare il determinante di B, perchè conosciamo coniche spezzate e punti base, mentre $|A| = 1 - (\frac{\lambda+2}{2})^2 = \frac{-\lambda^2-4\lambda}{4}$.

Quindi si hanno: **ellissi** per $|A| > 0$ cioè per $-4 < \lambda < \ 0$; **parabole** per i valori di λ tali che $|A| = 0$ ma $|B| \neq 0$; cioè per $\lambda = -4$; **iperboli** per $\lambda < -4$ e $\lambda > 0$.

2. Ricordando che il centro si trova dal sistema $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{13} = 0 \end{cases}$, nel nostro caso deve accadere che il sistema $\begin{cases} x + \frac{\lambda+2}{2}y + \frac{\lambda+3}{2} = 0 \\ \frac{\lambda+2}{2}x + y + \frac{\lambda+3}{2} = 0 \end{cases}$ deve essere soddisfatto da $x = 0$ e $y = 0$. Ciò si verifica per $\lambda = -3$. Quindi la conikca da studiare è $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$. In tal caso $|B| = -\frac{3}{4}$; $|A| = \frac{3}{4}$. Si avrà una forma canonica del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$, dove gli autovalori α e β si troavano dal polinomio caratteristico $\begin{vmatrix} 1-T & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-T \end{vmatrix} = 0$. Si trova, per esempio, $\alpha = \frac{1}{2}; \beta = \frac{3}{2}$. Facendo uso degli invarianti ortogonali si calcola anche $\gamma = 1$.
Quindi una forma canonica è $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{2}{3}} = 1$. Il cambiamento di coordinate è dato da una rotazione di $\frac{\pi}{4}$.

3. Le equazioni della direttrice γ sono $\begin{cases} z=0 \\ x^2-xy+y^2-1=0 \end{cases}$. Un punto generico G su γ ha coordinate $G=(\alpha,\beta,0)$, con la condizione $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-1=0$.
La retta generica VG ha equazioni $\frac{x-1}{\alpha-1}=\frac{y+1}{\beta+1}=z+1$. Da questa si ricavano $\alpha=\frac{x+z}{z+1}$; $\beta=\frac{y-z}{z+1}$. Sostituendo i valori di α e β nell' equazione di condizione si ottiene l' equazione del cono. Sviluppando i calcoli si ha:

$$x^2-xy+3xz+y^2-3yz+2z^2-2z-1=0$$

II

Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio euclideo col prodotto scalare usuale.
Determinare il generico endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ **semplice**, avente $v_1=(1,0,1)$ come autovettore associato all'autovalore **doppio** $T=2K$.
Inoltre si sa che gli autovettori sono a due a due ortogonali e che $Ker(f)\neq\{O_{\mathbb{R}^3}\}$.
b) Dopo avere trovato la matrice $A=M^{E,E}(f)$ rispetto alle basi canoniche, studiare f indicando, al variare di k, una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
c) Detta $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione

$$g(x,y,z)=(2x+y,2y+2kz,x+2z)$$

studiare, al variare di k, il sottospazio $W=Im(f)\cap Im(g)$.

Risoluzione

1. Sappiamo che una base di autovettori ortogonali è data dai vettori $v_1=(1,0,1);v_2=(0,1,0);v_3=(1,0,-1)$. Poichè l' autovalore $T=2K$ è doppio e v_1 è un autovettore associato dovra' essere $f(v_1)=2Kv_1$; $f(v_2)=2Kv_2$ oppure $f(v_3)=2Kv_3$.
Operiamo la prima scelta; allora visto che il nucleo dell' endomorfismo è non nullo dovra esserci l' autovalore nullo. Quindi è ovvio che $f(v_3)=(0,0,0)$. Ne segue che l' endomorfismo è definito da :

$$f(1,0,1)=(2K,0,2K);\quad f(0,1,0)=(0,2K,0);\quad f(1,0,-1)=(0,0,0).$$

Se si fosse operata la seconda scelta si sarebbe proceduto in modo analogo.

2. Quindi, nel primo caso, la matrice A associata rispetto alle basi canoniche è data $\begin{pmatrix} K & 0 & K \\ 0 & 2K & 0 \\ K & 0 & K \end{pmatrix}$.
Per $K=0$ A diventa la matrice nulla e l' applicazione è l' applicazione nulla, che ha come immagine lo zero di $\mathbb{R}^3$ e come nucleo tutto $\mathbb{R}^3$.
Se invece $K\neq 0$, riducendo la matrice si ha $\begin{pmatrix} K & 0 & K \\ 0 & 2K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha rango 2 e quindi la dimensione di $Im(f)$ è 2. Una base dell' immagine è data da $(1,0,1);(0,1,0)$. Il nucleo è dato da $(1,0,-1)$.

3. La matrice associata a g, rispetto alle basi canoniche, è $M(g)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2K & 2 \end{pmatrix}$. Si vede subito che il suo rango è 3 per $K\neq -4$. Mentre per $K=-4$ il rango è due.
Bisogna distinguere vari casi:
Per $K\neq 0,-4$, l' immagine di f è definita dall' equazione $x-z=0$, che si ricava calcolando le relazioni definite dallo spazio delle colonne della matrice associata ad f, mentre la g è suriettiva.

In tal caso l' intersezione delle immagini è data da $x - z = 0$.
Per $K = 0$, la prima applicazione è l' applicazione nulla, quindi in questo caso l'intersezione delle immagini è data dalla immagine di g.
Se invece $K = -4$, l' immagine di f ha equazione $x - z = 0$, mentre l' immagine di g si ottiene calcolando le equazioni omogenee dello spazio generato dalle colonne di $M(g)$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ x & y & z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & y & z-2x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & z-2x+4y \end{pmatrix}$$

In definitiva l' intersezione delle immagini è data dal sistema $\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - 4y - z = 0 \end{cases}$