FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Prova scritta di **Geometria** per Ripetenti assegnata il 18/11/2005

I

Si consideri l' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(0,0,1) = (2-h, 2-h, 2)$ e che $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (-1,1,1)$ siano autovettori associati rispettivamente agli autovalori $T_1 = h$ e $T_2 = -2$.

1. Studiare, al variare di h, l' endomorfismo f, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.

2. Provare che per ogni h l' endomorfismo è semplice.

3. Determinare, al variare di h, $f(V)$ dove $V = \{(x,y,z) | x - y - z = 0\}$.

Risoluzione
Dal fatto che v_1 e v_2 siano autovettori associati agli autovalori h e -2 segue, per definizione, che $f(1,1,0) = (h,h,0)$; $f(-1,1,1) = (2,-2,-2)$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (h,h,9) \\ -f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (2,-2,-2) \\ f(e_3) = (2-h, 2-h, 2) \end{cases}$$

si ha $f(e_1) = (0,2,2)$; $f(e_2) = (h, h-2, -2)$; $f(e_3) = (2-h, 2-h, -2)$; ne segue che la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 2-h \\ 2 & h-2 & 2-h \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Riducendo per righe la matrice, scambiando la I riga con la III e riducendo alla fine si ottiene:
   Se $h = 0$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; il rango è due e una base dell' immagine è data da due colonne indipendenti, la I e la III, della matrice data per $h = 0$. Mentre il $Ker(f)$ si ottiene il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Il generico elemento del $ker(f)$ è dato da $(x,x,0)$. Una base del nucleo è data da $(1,1,0)$.

   Se $h \neq 0$ riducendo la matrice si ha $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & h & 2-h \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. In tal acso si ha un isomorfismo.

2. Studiamo adesso la semplicità dell' endomorfismo. La matrice caratteristica è

$$\begin{pmatrix} -T & h & 2-h \\ 2 & (h-2)-T & 2-h \\ 2 & -2 & 2-T \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante si trova che gli autovalori sono $T_1 = h$; $T_2 = -2$; $T_3 = 2$.
Si può allora affermare che, per $h \neq \pm 2$ essendo gli autovalori reali e distinti, l' endomorfismo è semplice.
Mentre per $h = -2$ l' autovalore $T = -2$ è doppio. Bisogna valutare il rango della matrice caratteristica $(A - (-2)I)$. Si vede subito che tale matrice ha rango 1 e quindi la $dimV_{-2} = 3 - 1 = 2$ ed uguaglia la molteplicità algebrica dell' autovalore. L' altro autovalore ha molteplicità 1 e quindi l' endomorfismo è semplice.
In modo analogo si procede per valutare la semplicità per $h = 2$.

3. Per calcolare $f(V)$ basta calcolare il sottospazio generato dalle immagini dei vettori di una base di V. Dalla relazione che definisce V si trova $x = y + z$. Quindi una base è data dai vettori $w_1 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (1, 0, 1)$. Troviamo allora le relazioni lineari omogenee che definiscono il sottospazio $W = \mathcal{L}(f(w_1), f(w_2))$. Si trova subito $f(w_1) = (h, h, 0)$ e $f(w_2) = (2 - h, 4 - h, 4)$. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2-h & 4-h & 4 \\ h & h & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2-h & 4-h & 4 \\ h & h & 0 \\ x-(2-h)z & y-(4-h)z & 0 \end{pmatrix}$$

Per $h = 0$ si ha $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ x-2z & y-4z & 0 \end{pmatrix}$ Quindi lo spazio W è dato da $\begin{cases} x = 2z \\ y = 4z \end{cases}$.

Se $h \neq 0$ riducendo la matrice si ottiene $\begin{pmatrix} 2-h & 4-h & 4 \\ h & h & 0 \\ 0 & K & 0 \end{pmatrix}$ con $K = y - (4 - h)z - x + (2 - h)z = y - 2z - x = 0$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

Nel piano $z = 0$ si consideri il fascio di coniche

$$x^2 + y^2 + (k - 2)xy + x + y = 0$$

1. Studiare il fascio, al variare di k, e determinare i punti base e le coniche spezzate.
2. Detta $\wp$ la parabola del fascio ridurla a forma canonica.
3. Trovare l' equazione del cono avente vertice $V = (1, 1, -1)$ e direttrice $\wp$.

Risoluzione

1. La matrice della conica è $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda-2}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\lambda-2}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Il suo determinente $|B| = \frac{\lambda-4}{4}$; mentre $|A| = \frac{-\lambda^2+4\lambda}{4}$. Le coniche spezzate sono $xy = 0$ che si ottiene per $\lambda = \infty$; e quella che si ottiene per $\lambda = 4$, e che ha equazione $(x + y)^2 + x + y = 0$.
Si hanno ellissi per $|A| > 0$, cioè per $0 < \lambda < 4$.
Si hanno iperboli per $\lambda < 0$ e $\lambda > 4$.
Si ha una parabola per $\lambda = 0$.

I punti base sono l' origine O contato due volte e i punti $A = (-1, 0)$ e $B = (0, -1)$.

2. La riduzione della parabola a forma canonica è lasciata allo studente; basta vedere il libro di testo per avere un modello di soluzione.

3. L'equazione del cono si trova pure facilmente. Si consideri un punto generico sulla parabola $\wp$. Esso è il punto G di coordinate $(\alpha, \beta, 0)$, con la condizione di appartenenza alla parabola $\alpha 2 + \beta 2 - 2\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$. Consideriamo le equazioni della retta VG. Esse sono: $\frac{x-\alpha}{1-\alpha} = \frac{y-\beta}{1-\beta} = -z$. Ricavando α e β e sostituendo nell' equazione di condizione si ottiene l' equazione del cono: $x^2 - 2xy + y^2 + xz + yz = 0$.