Lezioni di Geometria

Giuseppe Paxia

Facoltà di Ingegneria
Università di Catania

Presentazione

Ho pensato di scrivere questo testo di "Lezioni di Geometria" con lo scopo di fornire allo studente un valido supporto didattico, senza accondiscendere alla tentazione di scrivere qualcosa di veramente innovativo, che avrebbe forse gratificato me, ma non avrebbe soddisfatto le sue esigenze di studio.

Un primo corso di Geometria nelle Facoltà di Ingegneria e di Scienze consta solitamente di due parti fondamentali: l'Algebra Lineare e la Geometria Analitica.

L'Algebra Lineare si occupa, fondamentalmente, dello studio degli spazi vettoriali, delle applicazioni lineari, delle matrici, della risoluzione dei sistemi lineari, oltre che dello studio delle forme quadratiche e la loro riduzione a forma canonica. Tali argomenti hanno grande importanza perché non vi è disciplina teorica o applicativa che non ne faccia un vasto uso.

Anche studiando la Geometria si utilizzano ampiamente le nozioni anzidette, e questo è il motivo per cui l'Algebra Lineare è ormai considerata parte integrante della materia.

La parte del corso relativa alla Geometria Analitica si occupa dei metodi per rappresentare rette e piani nello spazio mediante equazioni o sistemi di equazioni lineari nonché dello studio sistematico delle coniche e delle quadriche, evidenziandone proprietà sempre più profonde che portano alla loro completa classificazione.

Ma c'è da dire che mentre il corso di Algebra Lineare è abbastanza ben definito nei contenuti e nei metodi usati per conseguire certi risultati, quello relativo alla Geometria Analitica dà una più vasta gamma di scelte e, a parità di scelte degli argomenti, i metodi usati non sono sempre della stessa natura, per cui, passando da un testo ad un altro, lo studente ha qualche disagio, soprattutto quando è all'inizio degli studi e quindi non ha adeguata esperienza.

In verità esistono già nella letteratura ottimi libri di Geometria, sia classici che moderni, alcuni in forma di veri e propri trattati.

Il testo da me proposto vuole essere il più stringato e sintetico possibile, ma vuole coprire tutti gli argomenti che ormai, per la lunga esperienza maturata insieme ai colleghi che tengono lo stesso mio insegnamento, sono ritenuti da un canto formativi e dall'altro di base per ulteriori studi e applicazioni.

Il libro si articola su cinque capitoli. Nel primo vengono introdotti i vettori geometrici e le loro proprietà, i sistemi di riferimento cartesiano nel piano e nello spazio oltre che le coordinate polari e cilindriche. Se si eccettua il paragrafo riguardante i cambiamenti di coordinate, tale capitolo non richiede conoscenze di Algebra Lineare e solitamente è la prima parte del corso che viene sviluppata a lezione. Anche i capitoli secondo e terzo non richiedono prerequisiti; in essi si tratta la geometria lineare nel piano e nello spazio.

Nel capitolo quarto si studiano le coniche e le loro proprietà e nel quinto vengono studiate le quadriche. Per tali ultimi capitoli è necessario avere acquisito importanti nozioni di Algebra Lineare e pertanto è bene studiarli dopo avere completato lo studio dell'Algebra Lineare.

Il testo è corredato da esempi ed esercizi; da alcuni molto elementari che richiedono solo l'applicazione di semplici formule, ad altri più complessi dove vengono suggeriti metodi e tecniche di risoluzione.

Nel concludere tale premessa, non posso fare a meno di esprimere il più vivo ringraziamento ai colleghi del gruppo di Geometria Algebrica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Catania che, a vario titolo, mi hanno aiutato nel portare avanti tale lavoro. Via via che le note venivano scritte, le sottoponevo alla loro lettura per avere dei consigli, rimuovere errori e imprecisioni e devo dire che, seguendo tanti loro consigli, il testo ne ha certamente guadagnato; da ciò la mia gratitudine a tutti loro.

Desidero ringraziare l'allievo ingegnere Elio Ragusa che, sfruttando le sue competenze in "computer graphics", ha disegnato la copertina del libro.

Agli alunni rivolgo l'invito a studiare con molta passione e determinazione e soprattutto a seguire le lezioni svolte in classe dal docente. Perché la dinamica dell'apprendimento scatta fortemente quando certi fattori emotivi vengono sollecitati; e ciò si determina in classe con l'insostituibile apporto del docente che, con la sua esperienza, sa creare l'atmosfera giusta, approfondendo ciò che è essenziale e sorvolando sugli aspetti marginali.

Spero comunque che tale testo possa essere utile allo studente il quale farebbe cosa gradita se segnalasse parti che non fossero espresse in modo chiaro e convincente al fine di rendere possibili migliorie o aggiustamenti da apportare in una eventuale seconda edizione.

Voglio dedicare tale lavoro alla memoria di mio padre, scomparso 35 anni fa, di cui ricordo sempre il talento e la grande passione verso questa disciplina.

Catania, Gennaio 1997

Giuseppe Paxia

Seconda edizione

D'accordo con l'editore abbiamo deciso di fare una seconda tiratura del libro, in attesa della riforma dei corsi universitari. Ho apportato alcune correzioni senza però cambiare la natura e lo stile del testo.

Catania, Marzo 2000

Giuseppe Paxia

Indice

Capitolo 1

I vettori

1.1 I vettori geometrici dello spazio

Tutti sanno che certe grandezze fisiche, quali la massa di un corpo, la temperatura di una località in un certo istante, il volume di un corpo e così via sono perfettamente determinate una volta noto il numero reale che esprime la loro entità. Tali grandezze si dicono grandezze **scalari**. Ci sono altre grandezze, quali per esempio le forze applicate ad una data massa, la velocità e l'accelerazione di un corpo, che non sono determinate solo dalla loro intensità; infatti forze che agiscono in direzioni differenti, anche se della stessa intensità, producono effetti differenti alla massa a cui sono applicate. Vengono quindi introdotte le **grandezze vettoriali**, che sono perfettamente descritte una volta che siano noti il modulo, la direzione e il verso. Lo studio della Fisica fornisce svariati esempi di tali grandezze o **vettori**.

Nello spazio ordinario S, che è lo spazio dove vengono assunti gli **assiomi** della geometria euclidea, i vettori vengono rappresentati da frecce, con un punto iniziale ed un punto finale.

Nella figura seguente sono rappresentati vari vettori:

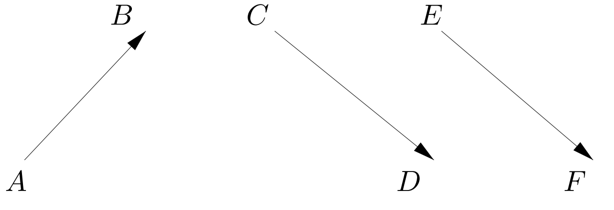


fig.1

Per indicare il primo vettore della figura si può usare la notazione $\overrightarrow{AB}$ o anche (A, B), che mette in risalto il punto iniziale A e il punto finale B. Noi useremo preferibilmente la seconda notazione, identificando il vettore $\overrightarrow{AB}$ con il segmento orientato (A, B), e lo diremo vettore **applicato** in A. Esaminando ancora la figura si ha che i segmenti orientati (C, D) e (E, F) sono paralleli, hanno la stessa ampiezza e lo stesso verso; diremo in tal caso che essi sono **equipollenti**. La relazione di equipollenza $\mathcal{R}$ è una relazione di **equivalenza** nell'insieme SO di tutti i segmenti orientati dello spazio, nel senso che $\mathcal{R}$ gode delle proprietà:

1. **riflessiva:** ogni segmento orientato è equipollente a se stesso;

2. **simmetrica:** se $(A, B)\mathcal{R}(C, D)$ allora $(C, D)\mathcal{R}(A, B)$, per ogni coppia di segmenti orientati;

3. **transitiva:** se $(A, B)\mathcal{R}(C, D)$ e $(C, D)\mathcal{R}(E, F)$ allora $(A, B)\mathcal{R}(E, F)$, per ogni terna di segmenti orientati.

Si può allora definire l'insieme "quoziente" $SO/\mathcal{R}$, cioè l'insieme che ha per elementi le classi di equipollenza in cui vengono "ripartiti" gli elementi dell'insieme SO.

Tali elementi si dicono **vettori liberi** dello spazio o **vettori geometrici** e il loro insieme verrà denotato con $\mathcal{V}_g$.

Allora, per esempio, il segmento orientato (A, B) individua una classe di equipollenza che denoteremo con $[A, B]$, ovvero un vettore libero $\mathbf{v}$. Ciò significa che $\mathbf{v} = [A, B]$ rappresenta la totalità di tutti i segmenti orientati equipollenti ad (A, B). I segmenti orientati della fig.1 (C, D) e (E, F), in quanto equipollenti, individuano lo stesso vettore libero $\mathbf{w}$. Si può quindi scrivere indifferentemente $\mathbf{w} = [C, D]$ oppure $\mathbf{w} = [E, F]$. Si ha che un vettore libero è individuato da un suo qualunque "rappresentante".

Osservazione 1 *Se si fissa un qualunque punto O dello spazio, per ogni vettore libero $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_g$, esiste uno e un solo rappresentante di $\mathbf{v}$ applicato in O.*

Si definisce **modulo** del vettore $\mathbf{v} = [A, B]$ il numero reale non negativo $|\mathbf{v}|$ che esprime la distanza $\overline{AB}$ dei due punti A e B, rispetto all'unità di misura fissata.
Il vettore libero $\mathbf{v} = [A, A]$ è particolare, ma non verrà escluso dalle nostre considerazioni. Esso è chiamato il **vettore nullo**, ed ha modulo zero, direzione e verso indeterminati; in tal caso si scrive che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$; tale vettore è l'unico vettore avente modulo nullo.

1.1.1 La somma di vettori

Nell'insieme dei vettori liberi dello spazio introduciamo una operazione di somma, nel modo seguente. Siano $\mathbf{v} = [A, B]$ e $\mathbf{w} = [C, D]$ due vettori liberi.

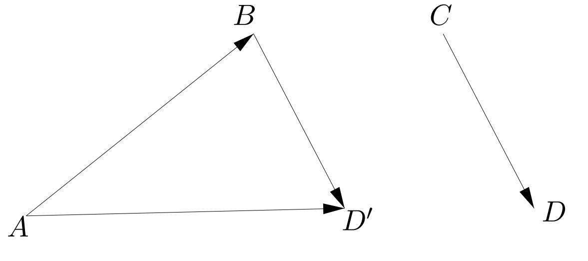


fig. 2

Definizione 1 *Definiamo $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ il vettore libero individuato dal segmento orientato (A, D'), ottenuto riportando dal secondo estremo B di (A, B) il segmento orientato (B, D') equipollente a (C, D), e congiungendo A con D', come è mostrato nella fig.2.*

Tale operazione è "ben definita", in quanto la classe di equivalenza individuata da (A, D') non dipende dalla scelta dei rappresentanti dei vettori liberi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Infatti se $\mathbf{v} = [P, Q]$ e $\mathbf{w} = [R, S]$, riportando da Q il segmento (Q, S'), equipollente a (R, S), si ottiene il segmento (P, S') che risulta equipollente ad (A, D') e quindi individua lo stesso vettore libero $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

Per la definizione di somma di vettori liberi è chiaro che il vettore nullo $\mathbf{0}$ è "neutro" , cioè $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ per ogni vettore $\mathbf{v}$.

Nel caso particolare in cui i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ siano paralleli, applicando la definizione di somma di vettori si deduce subito che il vettore somma è parallelo ai vettori dati ed ha modulo uguale alla somma o alla differenza dei moduli a seconda che i due vettori siano orientati in modo concorde o in modo discorde e verso concorde al vettore di modulo maggiore.

Nella fig.3(a,b,c) seguente sono riportate diverse situazioni relative alla somma di vettori paralleli.

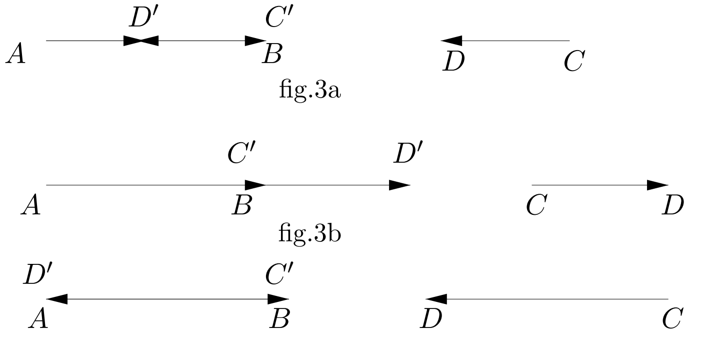


fig.3c

Per esempio nella fig.3a $\mathbf{v} = [A, B]$ e $\mathbf{w} = [C, D]$ sono paralleli e discordi e $|\mathbf{v}| > |\mathbf{w}|$ e il vettore $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è il vettore libero rappresentato da (A, D') che è parallelo ai due vettori, ha verso concorde al verso del vettore di modulo maggiore ed ha modulo uguale alla differenza dei moduli.

Nella fig.3b i vettori $\mathbf{v} = [A, B]$ e $\mathbf{w} = [C, D]$ sono paralleli e concordi e il vettore somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è rappresentato dal segmento orientato (A, D') e quindi è parallelo e concorde ad entrambi ed ha come modulo la somma dei moduli dei due vettori.

Nella fig.3c, infine, si ha la situazione in cui i due vettori $\mathbf{v} = [A, B]$ e

$\mathbf{w} = [C, D]$ sono paralleli e discordi ed hanno lo stesso modulo. In tal caso si vede subito che il vettore somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è il vettore nullo, e si dice che i due vettori sono **opposti**. Si ha subito che per ogni vettore $\mathbf{v}$ esiste un unico **opposto**, che si suole indicare con $-\mathbf{v}$.

Se i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono paralleli, il vettore libero $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ si può pensare individuato dalla diagonale (A, D') del parallelogramma costruito sui rappresentanti (A, B) e (A, D'') con quest'ultimo equipollente a (C, D), vedi fig.4.

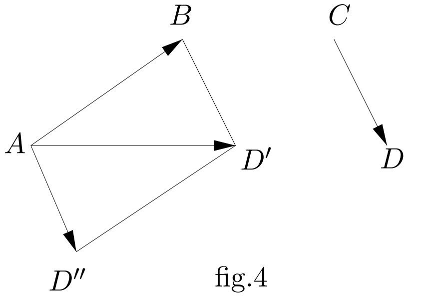


fig.4

Osserviamo che la somma di vettori gode della proprietà commutativa, cioè per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$, in quanto la diagonale del parallelogramma non dipende dall'ordine secondo cui effettuiamo la somma.

L'operazione di somma di vettori liberi gode della proprietà **associativa**. Ciò significa che comunque si scelgano tre vettori liberi $\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ si ha $(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{z}=\mathbf{v}+(\mathbf{w}+\mathbf{z})$.

Per provare la proprietà associativa basta osservare che se uno dei tre vettori è il vettore nullo la proprietà è banale. Altrimenti per la Oss.1 di pag. 3 possiamo supporre che i vettori dati siano rappresentati da tre segmenti orientati uscenti da uno stesso punto A. Sia quindi $\mathbf{v} = [A, B]$, $\mathbf{w} = [A, C]$, $\mathbf{z} = [A, D]$. La dimostrazione si ottiene osservando che comunque vengano associati i vettori la loro somma è data dal vettore libero avente come rappresentante il segmento orientato (A, E) che corrisponde alla diagonale del parallelepipedo costruito sui segmenti orientati (A, B), (A, C), e (A, D).

Osservare la seguente figura:

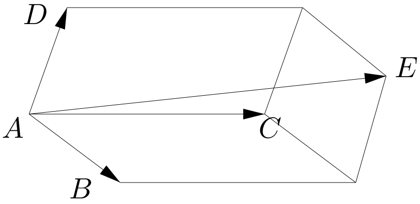


fig.5

Riassumendo, sull'insieme $\mathcal{V}_g$ dei vettori liberi dello spazio è stata definita una operazione di somma per cui valgono le seguenti proprietà:

a) la somma è **associativa**;

b) esiste un **elemento neutro** per la somma;

c) per ogni vettore esiste **l'opposto**;

d) la somma è **commutativa**.

Tutto ciò significa che l'insieme $\mathcal{V}_g$ dei vettori liberi dello spazio ordinario, rispetto alla somma che abbiamo definito, ha la struttura di **gruppo commutativo o abeliano**.

Osservazione 2 *Siano dati in S tre punti qualunque P_1, P_2, P_3. Dalla definizione di somma di vettori segue che $[P_1, P_2] + [P_2, P_3]$ è il vettore $[P_1, P_3]$ rappresentato dal segmento orientato congiungente i punti estremi P_1 e P_3.*
Questo si può generalizzare ad un insieme finito qualunque di n punti P_1, P_2, $\cdots$, P_n. Precisamente il vettore somma $[P_1, P_2] + [P_2, P_3] + \cdots + [P_{n-1}, P_n]$ è dato dal vettore $[P_1, P_n]$ rappresentato dal segmento avente P_1 come punto iniziale e P_n come punto finale.

Da ciò deriva la seguente proprietà, nota come **identità di Chasles**, la quale asserisce:

Proposizione 1 *Dato nello spazio il vettore $[A, B]$. Allora comunque si prendano n punti $C_1, C_2, \cdots, C_n$ si ha:*

$$[A, B] = [A, C_1] + [C_1, C_2] + \cdots + [C_{n-1}, C_n] + [C_n, B]$$

1.1.2 Prodotto di un numero per un vettore

Sia dato un qualunque vettore $\mathbf{v} = [A, B]$ dello spazio ordinario e sia $a \in \mathbb{R}$ un qualunque numero reale. Si definisce il prodotto dello scalare a per il vettore $\mathbf{v}$ il vettore libero $a\mathbf{v}$ secondo la seguente

Definizione 2 *Il vettore $a\mathbf{v}$ ha modulo $|a||\mathbf{v}|$; nel caso in cui tale modulo è zero, $a\mathbf{v}$ è il vettore nullo; altrimenti è il vettore libero rappresentato da un segmento orientato parallelo ad (A, B), verso concorde ad (A, B) se $a > 0$ e verso discorde ad (A, B) se $a < 0$.*

Naturalmente la definizione data è ben posta. Infatti è facile convincersi che il vettore libero $a\mathbf{v}$ non dipende dal rappresentante usato per individuare $\mathbf{v}$. Sussiste la seguente

Proposizione 2 *Comunque si prendano $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}_g$ si ha:*

1. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
2. $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$
3. $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
4. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

La dimostrazione delle precedenti proprietà è abbastanza semplice ed è lasciata al lettore per esercizio.

Abbiamo osservato che l'insieme $\mathcal{V}_g$ dei vettori liberi dello spazio, rispetto alla operazione di somma che abbiamo definito, ha la struttura di gruppo abeliano. Inoltre abbiamo definito il prodotto di un numero reale per un vettore ed esso soddisfa le proprietà della Prop.2. Pertanto, come verrà ampiamente approfondito nel corso di Algebra Lineare, ciò significa che $\mathcal{V}_g$ ha la struttura di **spazio vettoriale**.

A questo punto è possibile dare una condizione di **parallelismo** tra vettori liberi. Precisamente si ha

Proposizione 3 *Se* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono due vettori liberi non nulli, allora essi sono paralleli se e solo se esiste uno scalare* $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *per cui* $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$.

DIMOSTRAZIONE. Se i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono paralleli è sempre possibile, moltiplicando $\mathbf{w}$ per un opportuno scalare $|\lambda| \in \mathbb{R}^+$, rendere uguali i moduli dei vettori $\mathbf{v}$ e $\lambda\mathbf{w}$; basta scegliere $|\lambda| = \dfrac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{w}|}$; per avere poi l'eguaglianza dei vettori, si scelga λ positivo o negativo, a seconda che i vettori dati siano paralleli e concordi o paralleli e discordi.
Il viceversa è ovvio, in quanto se due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono tali che $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ essi sono paralleli, per definizione.

Nel seguito, per indicare che i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono paralleli, useremo la notazione $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$.

1.1.3 Prodotto scalare

Dati i due vettori $\mathbf{v} = [A, B]$ e $\mathbf{w} = [A, C]$ si definisce $\widehat{\mathbf{vw}}$ l'angolo convesso θ formato dai vettori; quindi deve aversi $0 \leq \theta \leq \pi$.

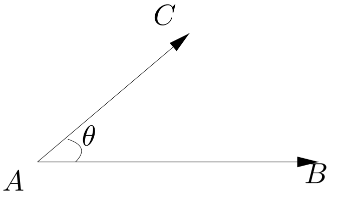


fig.6

Diamo adesso la definizione di prodotto scalare di vettori che riveste una particolare importanza per le applicazioni successive.

Definizione 3 *Dati i vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *si definisce loro prodotto scalare e si indica* $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}$ *il numero seguente:*
se uno dei due vettori è nullo il prodotto scalare è zero;
altrimenti $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\ |\mathbf{w}| \cos\theta$, *dove* θ *è l'angolo* $\widehat{\mathbf{vw}}$ *e* $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{w}|$ *indicano i moduli dei vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

Dalla precedente definizione segue subito che il prodotto scalare di due vettori gode della proprietà **commutativa**.
Inoltre per due vettori non nulli e perpendicolari il prodotto scalare è zero e viceversa se due vettori non nulli sono tali che il loro prodotto scalare $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = 0$ allora $\cos\theta = 0$ e i due vettori sono perpendicolari.
Se si conviene di considerare il vettore nullo $\mathbf{0}$ perpendicolare ad ogni vettore, allora si può dire che due qualunque vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono **ortogonali** se e solo se il loro **prodotto scalare** è zero.

Nel seguito per indicare che i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali scriveremo che $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

Si definiscono **versori** i vettori di modulo unitario. Se allora **i, j** sono versori, in base alla definizione segue che $\mathbf{i}\bullet\mathbf{j} = \cos\theta$, dove θ indica l'angolo dei due versori.

Osserviamo che dato un qualunque vettore $\mathbf{v}$ non nullo, dividendo il vettore per il suo modulo si ottiene il **versore** $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, concorde al vettore $\mathbf{v}$.

Convenzione 1 *Se $\vec{r}$ è una retta orientata su cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, mediante la scelta dell'origine O e del versore* **i***, un segmento orientato (A, B) sulla retta ha misura* **positiva** *se il suo verso è concorde al verso del versore* **i***, ha misura* **negativa** *se il suo verso è discorde. La misura di (A, B) come segmento non orientato è il modulo del vettore $[A, B]$, cioè la distanza $\overline{AB}$ rispetto all'unità di misura fissata.*

La seguente proposizione è molto importante per le applicazioni del seguito.

Proposizione 4 *Se* **i** *è un versore che dà l'orientamento ad una retta orientata $\vec{r}$, il prodotto scalare $\mathbf{v}\bullet\mathbf{i}$ fornisce la misura del segmento orientato, proiezione di* **v** *su $\vec{r}$.*

DIMOSTRAZIONE. Riferiamoci adesso alla fig.7 seguente.

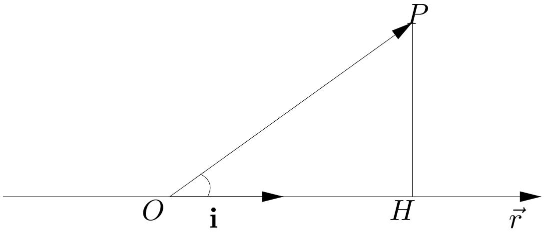


fig.7

Detto $\mathbf{v} = [O, P]$ un vettore e $\mathbf{i}$ un versore che fissa l'orientamento sulla retta orientata $\vec{r}$, il prodotto scalare $\mathbf{v} \bullet \mathbf{i} = |\mathbf{v}| \cos\theta = \overline{OP} \cos\theta$, dove θ è l'angolo dei due vettori e $\overline{OP}$ la distanza dei punti O e P, dà in valore e segno la misura del segmento orientato (O, H), proiezione di $\mathbf{v}$ sulla retta orientata $\vec{r}$. $\square$

Per denotare la proiezione del vettore $\mathbf{v}$ sulla retta orientata $\vec{r}$ il cui orientamento è indicato dal versore $\mathbf{i}$ si suole scrivere $\mathbf{v}_{\vec{r}}$ o anche $\mathbf{v}_{\mathbf{i}}$.

Per le successive applicazioni è importante la seguente proposizione che fornisce delle proprietà del prodotto scalare. Si ha

Proposizione 5 *Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni scelta di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si ha*
1. $(a\mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = a(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})$.
Per ogni scelta dei vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ si ha:
2. $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{z}$.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto riguarda la 1. è immediato osservare che, se $a = 0$ oppure uno dei vettori $\mathbf{v}$ o $\mathbf{w}$ è il vettore nullo, allora ambo i membri della 1. sono zero. Altrimenti per $a \neq 0$, per esempio $a > 0$, si ha:

$$(a\mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = |a||\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \widehat{(a\mathbf{v})\mathbf{w}} = a|\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = a(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}).$$

Nella precedente si è tenuto conto essenzialmente del fatto che i vettori $a\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli e con lo stesso verso e quindi formano lo stesso angolo con $\mathbf{w}$, e che nelle eguaglianze riguardanti i numeri vale la proprietà associativa del prodotto. Se invece $a < 0$ si procede nel modo seguente:

$$(a\mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = |a||\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \widehat{(a\mathbf{v})\mathbf{w}} = -a|\mathbf{v}||\mathbf{w}|(-\cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}) = a(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}).$$

Nella precedente si tiene conto del fatto che in questo caso $a\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli e discordi e quindi gli angoli che essi formano con $\mathbf{w}$ hanno coseni opposti.

Per la 2. se $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ allora ambo i membri sono nulli e la proprietà è vera, altrimenti si dica $\mathbf{i}$ il versore parallelo a $\mathbf{v}$ e con lo stesso verso. Da ciò e dalla definizione di prodotto di uno scalare per un vettore segue che $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\mathbf{i}$, ed allora si ha:

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbf{v}\bullet(\mathbf{w}+\mathbf{z}) & = & (|\mathbf{v}|\mathbf{i})\bullet(\mathbf{w}+\mathbf{z}) & \text{per definizione} \\
 & = & |\mathbf{v}|[\mathbf{i}\bullet(\mathbf{w}+\mathbf{z})] & \text{per la parte 1.} \\
 & = & |\mathbf{v}|[(\mathbf{w}+\mathbf{z})_{\mathbf{i}}] & \text{per la Prop.4} \\
 & = & |\mathbf{v}|\mathbf{w}_{\mathbf{i}} + |\mathbf{v}|\mathbf{z}_{\mathbf{i}} & \text{perché la proiezione della somma} \\
 & & & \text{è la somma delle proiezioni} \\
 & = & |\mathbf{v}|(\mathbf{i}\bullet\mathbf{w}) + |\mathbf{v}|(\mathbf{i}\bullet\mathbf{z}) & \text{ancora per la Prop.4} \\
 & = & \mathbf{v}\bullet\mathbf{w} + \mathbf{v}\bullet\mathbf{z} & \text{ancora per la parte 1.}
\end{array}
$$

Nel corso della dimostrazione si è tenuto conto del fatto elementare che la proiezione su una retta orientata del vettore somma di due vettori è la somma delle proiezioni. □

Il prodotto scalare di vettori permette di "decomporre" un vettore come somma di due vettori fra loro perpendicolari. Più precisamente se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori non nulli è sempre possibile scrivere $\mathbf{u}$ come

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

dove $\mathbf{w}_1$ è parallelo a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}_2$ è perpendicolare a $\mathbf{v}$.

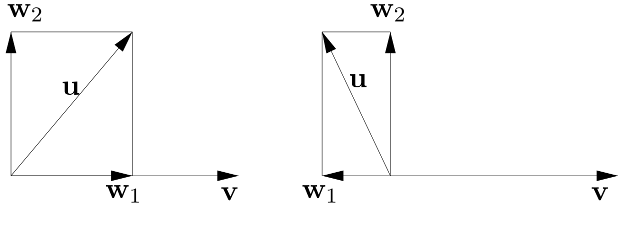


fig.8

Il vettore $\mathbf{w}_1$ si dice la proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ su $\mathbf{v}$ e il vettore $\mathbf{w}_2$ si dice la componente di $\mathbf{u}$ ortogonale a $\mathbf{v}$.

I vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ possono essere ottenuti come segue. Essendo $\mathbf{w}_1$ parallelo a $\mathbf{v}$ esso può scriversi nella forma $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{v}$. Allora

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ ambo i membri della precedente si ha

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = k|\mathbf{v}|^2 + \mathbf{w}_2\bullet\mathbf{v}$$

Ma $\mathbf{w}_2\bullet\mathbf{v} = 0$, visto che i vettori sono ortogonali ed allora $k = \dfrac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$. Quindi $\mathbf{w}_1 = \dfrac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$. Ricavando $\mathbf{w}_2$ dalla $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ si ottiene che la componente di $\mathbf{u}$ ortogonale a $\mathbf{v}$ è data da

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

1.1.4 Prodotto vettoriale

Vogliamo introdurre adesso il **prodotto vettoriale** di due vettori, che al pari del prodotto scalare ha delle interessanti applicazioni geometriche.

Definizione 4 *Dati due vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *si definisce il prodotto vettoriale dei due vettori e si indica con* $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *il vettore avente modulo* $|\mathbf{v}||\mathbf{w}|\sin\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$*; se tale modulo è zero si ottiene il vettore nullo; altrimenti* $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *ha direzione ortogonale a quella del piano dei due vettori e verso determinato dalla "regola della mano sinistra."*

Tale regola dice che disponendo le tre dita della mano sinistra, pollice, indice e medio in maniera tale che l'indice sia ortogonale al piano individuato da pollice e medio, se il pollice indica il verso di $\mathbf{v}$ e il medio quello di $\mathbf{w}$ allora l'indice indicherà il verso di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

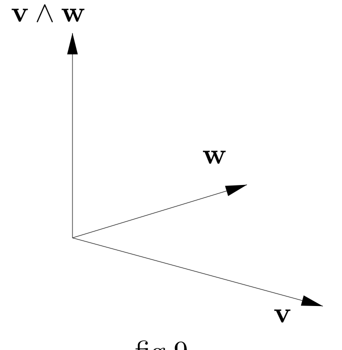


fig.9

Dalla definizione segue subito che il prodotto vettoriale di due vettori non gode della proprietà **commutativa**; in effetti si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
Per un teorema sulla risoluzione dei triangoli rettangoli in trigonometria, il modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ rappresenta l'area del parallelogramma costruito su $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
Due vettori non nulli sono paralleli se e solo se il loro prodotto vettoriale è il vettore nullo.

In analogia a quanto visto per il prodotto scalare di due vettori, anche per il prodotto vettoriale sussiste la seguente

Proposizione 6 *Dati comunque uno scalare $a \in \mathbb{R}$ e i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ si ha*

1. $(a\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = a(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;
2. $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{z}$.

1.1.5 Prodotto misto di vettori

Dati i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si può definire il loro prodotto misto:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$$

Non abbiamo adoperato nessuna parentesi, perché non c'è pericolo di ambiguità nell'interpretare l'ordine con cui effettuare i prodotti. Infatti l'unica cosa possibile da fare è quella di effettuare il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, ottenendo un vettore, da moltiplicare scalarmente per $\mathbf{u}$. Mentre non avrebbe avuto senso fare prima il prodotto scalare di $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ e poi moltiplicare vettorialmente per $\mathbf{w}$. Infatti, come sappiamo, il prodotto scalare di due vettori è un numero e non ha senso fare il prodotto vettoriale di un numero per un vettore.

Il risultato del prodotto misto dei tre vettori è un numero; il valore assoluto di questo numero ha un significato geometrico. Precisamente sussiste la seguente

Proposizione 7 *Il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui vettori.*

Dimostrazione. Ricordiamo che il modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ rappresenta l'area del parallelogramma costruito su $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e che moltiplicando scalarmente un vettore per un versore si ottiene in valore e segno la misura della proiezione del vettore sulla retta orientata dal versore.
Poichè il volume di un parallelepipedo si ottiene moltiplicando l'area di una base per l'altezza relativa, nel nostro caso si ha

$$|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}| = \left|\mathbf{u}\bullet\frac{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}}{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}|}|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}|\right| = \Big|h|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}|\Big|$$

Il prodotto scalare $\mathbf{u}\bullet\dfrac{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}}{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}|} = h$ rappresenta la proiezione del vettore $\mathbf{u}$ su una retta orientata perpendicolare al piano individuato dai due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in quanto $\dfrac{\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}}{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}|}$ rappresenta un versore in tale direzione. Siccome di tale proiezione a noi interessa la misura come segmento non orientato abbiamo usato il valore assoluto. □

Corollario 1 *Condizione necessaria e sufficiente perchè tre vettori* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *siano complanari è che il loro prodotto misto sia zero.*

1.2 Sistemi di coordinate

Nello spazio ordinario S, assegnare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale antiorario significa fissare un punto O, origine delle coordinate, una unità di misura U per le distanze e tre rette orientate $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ per O, a due a due perpendicolari, per cui i versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ che determinano sulle rette l'orientamento siano tali che $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.
Ciò posto, dato un qualunque punto P dello spazio, ad esso si può associare una terna ordinata di numeri reali (x, y, z) che si dicono le **coordinate cartesiane** del punto P. Si procede nel modo seguente: si proietta P ortogonalmente sugli assi $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, trovando i punti P_x, P_y, P_z come intersezioni con gli assi dei piani passanti per P e ortogonali rispettivamente a $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.
Su ciascuna delle rette è fissato un sistema cartesiano e quindi al punto P_x si associa univocamente un numero reale x, che come è noto rappresenta la misura del segmento orientato (O, P_x) rispetto all'unità di misura U; analogamente a P_y si associa univocamente un numero reale y e a P_z un numero reale z.

Viceversa, invertendo la costruzione precedente, data una qualunque terna ordinata di numeri reali (α, β, γ) esiste un unico punto $\overline{P}$, avente i numeri dati come sue coordinate.

Da quanto precede si può affermare che, fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, c'è *una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio e le terne ordinate di numeri reali.*

Riferiamoci alla figura seguente:

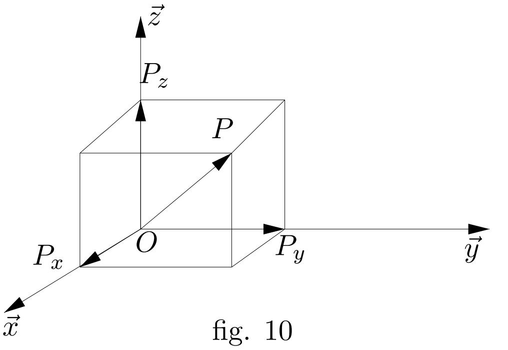


fig. 10

Un qualunque punto P dello spazio, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.U$, determinato dai versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, individua univocamente il vettore $\mathbf{v} = [O, P]$.

Il vettore applicato (O, P), essendo la diagonale del parallelepipedo costruito sui vettori applicati (O, P_x), (O, P_y) e (O, P_z), risulta un rappresentante della somma dei vettori $[O, P_x] + [O, P_y] + [O, P_z]$. Ma per quanto osservato nella Prop. 4, la misura del segmento orientato (O, P_x) si ottiene facendo il prodotto scalare $\mathbf{v} \bullet \mathbf{i}$; in modo analogo si procede per le altre misure.
Si deduce allora che il vettore $\mathbf{v}$ si può esprimere come

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{k})\mathbf{k} \tag{1.1}$$

dove i numeri $\mathbf{v} \bullet \mathbf{i}$, $\mathbf{v} \bullet \mathbf{j}$, $\mathbf{v} \bullet \mathbf{k}$, per definizione, sono le coordinate dell'estremo P del vettore $\mathbf{v}$.

Tali numeri si chiamano anche **le componenti** del vettore $\mathbf{v}$ considerato e sono **univocamente** determinati.
Per semplificare la scrittura si è soliti denotare $\mathbf{v} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{v}_x$, $\mathbf{v} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{v}_y$ e $\mathbf{v} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{v}_z$. Per cui solitamente scriveremo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x \mathbf{i} + \mathbf{v}_y \mathbf{j} + \mathbf{v}_z \mathbf{k} \tag{1.2}$$

e diremo che la precedente è l'espressione del vettore $\mathbf{v}$ mediante le componenti lungo gli assi $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$.

Per quanto detto precedentemente il modulo del vettore $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i}+\mathbf{v}_y\mathbf{j}+\mathbf{v}_z\mathbf{k}$ è dato da $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2}$.

Sempre rispetto al riferimento fissato, sia dato il vettore applicato (P_1, P_2) di cui conosciamo le coordinate del punto iniziale $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e del punto finale $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$; allora le componenti del vettore $[P_1, P_2]$ sono ordinatamente **le differenze delle coordinate omonime**.
Infatti, per l'identità di Chasles, si ha:

$$[P_1, P_2] = [P_1, O] + [O, P_2] = [O, P_2] - [O, P_1]$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri della precedente per i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ si ha quanto asserito.
Ne segue quindi che il modulo del vettore $[P_1, P_2]$, che è uguale alla **distanza dei due punti P_1 e P_2** è

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Sempre riferendoci ai punti P_1 e P_2 con coordinate assegnate come prima, si prova che il punto medio $M = (x, y)$ del segmento (P_1, P_2) ha coordinate date dalla **semisomma delle coordinate omonime** dei due punti estremi.
Infatti i vettori liberi $[P_1, M]$ e $[M, P_2]$ sono uguali e quindi hanno uguali ordinatamente le componenti; allora $x - x_1 = x_2 - x$ da cui $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ e così per le altre componenti.

Convenzione 2 *Ad ogni vettore libero* $\mathbf{v}$ *dello spazio* S *si può associare il suo rappresentante* (O, P) *applicato in* O*. Le componenti* $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z$ *di* $\mathbf{v}$ *sono le coordinate cartesiane ortogonali del secondo estremo* P *del vettore applicato* (O, P)*.*
Quindi si può identificare lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_g$ *dei vettori liberi* $\mathbf{v}$ *dello spazio ordinario con lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$ *delle terne ordinate di numeri reali, che sono le componenti di* $\mathbf{v}$*.*
Nel seguito, quando ciò non comporterà ambiguità, identificheremo tali spazi vettoriali senza farne esplicita menzione.

1.2.1 Operazioni sui vettori espresse mediante componenti

Abbiamo definito in precedenza la somma di vettori e il prodotto di uno scalare per un vettore. Supponiamo che due vettori siano espressi mediante le loro componenti lungo gli assi e siano $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}_x\mathbf{i} + \mathbf{w}_y\mathbf{j} + \mathbf{w}_z\mathbf{k}$. Allora, tenendo conto delle proprietà della somma e della Prop.2 si ha che:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= \mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k} + \mathbf{w}_x\mathbf{i} + \mathbf{w}_y\mathbf{j} + \mathbf{w}_z\mathbf{k} \\ &= (\mathbf{v}_x + \mathbf{w}_x)\mathbf{i} + (\mathbf{v}_y + \mathbf{w}_y)\mathbf{j} + (\mathbf{v}_z + \mathbf{w}_z)\mathbf{k} \qquad (1.3) \end{aligned}$$

Ciò si può esprimere dicendo che il vettore somma di due vettori ha per componenti la somma delle componenti.

In modo analogo è facile vedere che il prodotto dello scalare a per il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k}$ è il vettore

$$\begin{aligned} a\mathbf{v} &= a(\mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k}) \\ &= (a\mathbf{v}_x)\mathbf{i} + (a\mathbf{v}_y)\mathbf{j} + (a\mathbf{v}_z)\mathbf{k} \qquad (1.4) \end{aligned}$$

Quindi il vettore prodotto di uno scalare per un vettore dato mediante le sue componenti è un vettore avente per componenti i prodotti dello scalare per le componenti del vettore.

Siano dati i vettori $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}_x\mathbf{i} + \mathbf{w}_y\mathbf{j} + \mathbf{w}_z\mathbf{k}$ mediante le componenti.
In base alla definizione si ha subito che:

$$\mathbf{i}\bullet\mathbf{i} = \mathbf{j}\bullet\mathbf{j} = \mathbf{k}\bullet\mathbf{k} = 1; \text{ mentre } \mathbf{i}\bullet\mathbf{j} = \mathbf{i}\bullet\mathbf{k} = \mathbf{j}\bullet\mathbf{k} = 0$$

Sfruttando le proprietà contenute nelle Prop.2 e Prop.5 si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\bullet\mathbf{w} &= (\mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k})\bullet(\mathbf{w}_x\mathbf{i} + \mathbf{w}_y\mathbf{j} + \mathbf{w}_z\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{v}_x\mathbf{w}_x + \mathbf{v}_y\mathbf{w}_y + \mathbf{v}_z\mathbf{w}_z \qquad (1.5) \end{aligned}$$

Il risultato (1.5) dice che il prodotto scalare di due vettori scritti mediante le componenti si ottiene facendo la somma dei prodotti delle componenti omonime.

Tenendo conto della definizione di prodotto scalare di due vettori si ha che se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq 0$:

$$\cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|} \qquad (1.6)$$

Se i vettori sono dati mediante le componenti, allora il coseno del loro angolo si trova utilizzando la formula:

$$\cos \widehat{\mathbf{vw}} = \frac{\mathbf{v}_x\mathbf{w}_x + \mathbf{v}_y\mathbf{w}_y + \mathbf{v}_z\mathbf{w}_z}{\sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2}\sqrt{\mathbf{w}_x^2 + \mathbf{w}_y^2 + \mathbf{w}_z^2}} \tag{1.7}$$

Dalla precedente si deduce il seguente

Corollario 2 *Condizione necessaria e sufficiente perché due vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*, espressi mediante le loro componenti, siano ortogonali è che*

$$\mathbf{v}_x\mathbf{w}_x + \mathbf{v}_y\mathbf{w}_y + \mathbf{v}_z\mathbf{w}_z = 0$$

Se $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k}$ è un vettore, i coseni degli angoli che $\mathbf{v}$ forma con gli assi coordinati $\vec{x}, \vec{y}$, $\vec{z}$ si chiamano i **coseni direttori** di $\mathbf{v}$.
In base alle considerazioni fatte segue che:

$$\cos \widehat{\mathbf{vi}} = \frac{\mathbf{v}_x}{\sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2}};\ \cos \widehat{\mathbf{vj}} = \frac{\mathbf{v}_y}{\sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2}};\ \cos \widehat{\mathbf{vk}} = \frac{\mathbf{v}_z}{\sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2}}$$

È una immediata conseguenza la proprietà secondo cui **la somma dei quadrati dei coseni direttori** è sempre uguale a uno. □

In base alla definizione di prodotto vettoriale di due vettori segue subito che:

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0};\ \text{mentre } \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k};\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i};\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Si tenga conto del fatto che il prodotto vettoriale è **anticommutativo**, cioè per ogni coppia di vettori si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
Ed allora dati i due vettori $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}_x\mathbf{i} + \mathbf{w}_y\mathbf{j} + \mathbf{w}_z\mathbf{k}$ mediante le componenti, effettuiamo il prodotto vettoriale e teniamo conto dei prodotti vettoriali sui versori e delle proprietà espresse dalla Prop.6. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} &= (\mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{w}_x\mathbf{i} + \mathbf{w}_y\mathbf{j} + \mathbf{w}_z\mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{v}_y\mathbf{w}_z - \mathbf{v}_z\mathbf{w}_y)\mathbf{i} + (\mathbf{v}_z\mathbf{w}_x - \mathbf{v}_x\mathbf{w}_z)\mathbf{j} + \\ &+ (\mathbf{v}_x\mathbf{w}_y - \mathbf{v}_y\mathbf{w}_x)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Coloro che hanno delle conoscenze delle proprietà elementari delle matrici e dei determinanti, e tutti gli allievi le acquisiranno dopo aver studiato la parte del programma relativa all'Algebra Lineare, possono memorizzare la precedente formula riferendosi alla matrice seguente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{v}_x & \mathbf{v}_y & \mathbf{v}_z \\ \mathbf{w}_x & \mathbf{w}_y & \mathbf{w}_z \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Le componenti del prodotto vettoriale $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ sono nell'ordine i complementi algebrici degli elementi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Per concludere il paragrafo diamo l'espressione del prodotto misto di tre vettori, note le loro componenti.
Siano dati i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{u}_x\mathbf{i} + \mathbf{u}_y\mathbf{j} + \mathbf{u}_z\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}_x\mathbf{i} + \mathbf{w}_y\mathbf{j} + \mathbf{w}_z\mathbf{k}$.
Volendo effettuare il prodotto misto $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, teniamo conto che il prodotto scalare mediante le componenti è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omonime e ricordando come si trovano le componenti del prodotto vettoriale di due vettori, ne segue immediatamente che

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u}_x(\mathbf{v}_y\mathbf{w}_z - \mathbf{v}_z\mathbf{w}_y) + \mathbf{u}_y(\mathbf{v}_z\mathbf{w}_x - \mathbf{v}_x\mathbf{w}_z) + \mathbf{u}_z(\mathbf{v}_x\mathbf{w}_y - \mathbf{v}_y\mathbf{w}_x) \tag{1.10}$$

Vedremo che la formula (1.10) si ottiene dallo sviluppo del determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_x & \mathbf{v}_y & \mathbf{v}_z \\ \mathbf{w}_x & \mathbf{w}_y & \mathbf{w}_z \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

1.2.2 Esempi e applicazioni

Riportiamo alcuni semplici esempi dove vengono applicate le formule di cui abbiamo trattato nel corso dei paragrafi precedenti. Supponiamo che nello spazio sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.U$.

Esempio 1 *Siano dati i vettori* $\mathbf{u} = (1, -2, -1)$, $\mathbf{v} = (1, -1 - 1)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 2)$*, mediante le loro componenti. Determinare*
1. l'angolo ϑ *formato da* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$*;*
2. il vettore prodotto vettoriale di $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*;*
3. il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$*. Per visualizzare il parallelepipedo ci si può riferire a rappresentanti dei tre vettori uscenti da uno stesso punto.*

Soluzione. Per rispondere alla 1. basta applicare la formula

$$\cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_x\mathbf{v}_x + \mathbf{u}_y\mathbf{v}_y + \mathbf{u}_z\mathbf{v}_z}{\sqrt{\mathbf{u}_x^2 + \mathbf{u}_y^2 + \mathbf{u}_z^2}\sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2}}$$

Sostituendo i valori delle componenti si ha

$$\cos \vartheta = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

Quindi $\vartheta = \arccos \dfrac{4}{3\sqrt{2}}$.
2. Dalla matrice simbolica

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

prendendo i complementi algebrici degli elementi della prima riga si ha:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

3. Come sappiamo per calcolare il volume V del parallelepipedo individuato da tre vettori basta prendere il valore assoluto del prodotto misto dei vettori. Eseguendo il prodotto misto in componenti si ha: $1(-2+1)+2(2+1)-1(1+1) = 3$.

Esempio 2 *Sia dato il triangolo ABC e siano $a = \overline{CB}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Mediante l'uso dei prodotti scalari dimostare il teorema di Carnot per cui $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\vartheta$, dove $\vartheta = \widehat{BAC}$.*

Soluzione. Sia $\mathbf{v} = (A, B)$ e $\mathbf{w} = (A, C)$. Allora è immediato che $[C, B] = \mathbf{v} - \mathbf{w}$. Ricordando che $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}$ segue subito che:

$$|[C, B]|^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - 2\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$$

da cui segue subito la tesi.

Esempio 3 *Dati i vettori* $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$ *e* $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$ *determinare i vettori* $\mathbf{w}_1$ *e* $\mathbf{w}_2$ *tali che*

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

con $\mathbf{w}_1$ *parallelo a* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}_2$ *perpendicolare a* $\mathbf{v}$.

SOLUZIONE. Per quanto abbiamo visto in **1.1.3** si ha subito che

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{1}{5}(0, 1, 2) = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Mentre la componente ortogonale a $\mathbf{v}$ si calcola nel modo che segue

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = (1, -1, 1) - \left(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(1, \frac{-6}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

AVVERTENZA AI LETTORI

I paragrafi seguenti, sui cambiamenti di coordinate e sulle coordinate cilindriche e polari, possono essere omessi in prima lettura, perché richiedono conoscenze di argomenti che verranno ampiamente trattati nella parte del Corso relativa all'Algebra Lineare. Si ritornerà allo studio di tali paragrafi dopo avere acquisito le nozioni necessarie.

1.3 Cambiamenti di coordinate nello spazio

Supponiamo che nello spazio S sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.U$, relativo alla base ortonormale antioraria **i**, **j**, **k**. Vogliamo riferire S ad un nuovo sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O'\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}.U$, relativo ad una nuova base ortonormale antioraria $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$.

In ogni testo di Algebra Lineare si studiano ampiamente i concetti che seguono; noi riportiamo alcuni dettagli soprattutto per fissare le notazioni a cui poi faremo riferimento.

Se V è un k-spazio vettoriale di dimensione finita n, dette $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ ed $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ due basi di V, la **matrice del cambio di base** da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$, è la matrice P avente ordinatamente sulle colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{F}$, rispetto alla base $\mathcal{E}$.

In tal caso, dato un qualunque $v \in V$, esso ha delle componenti $[v]_{\mathcal{E}} = (x_1, \cdots, x_n)$ e $[v]_{\mathcal{F}} = (y_1, \cdots, y_n)$. Si prova facilmente che tali componenti sono legate dalle relazioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Le precedenti formule si dicono le formule del **cambiamento di coordinate** nello spazio vettoriale V, nel passaggio dalla base $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{F}$.

Ponendo $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, le (1.12) si possono scrivere in modo compatto

$$\underline{X} = P\underline{Y} \tag{1.13}$$

Applichiamo quanto precede allo spazio vettoriale dei vettori $\mathcal{V}_g$, col prodotto scalare che abbiamo definito, tenendo conto che le due basi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e $\mathbf{I}$,$\mathbf{J}$,$\mathbf{K}$

sono due basi **ortonormali**. In tal caso la trasformazione di coordinate è detta una **rotazione**.
La matrice del cambio di base ha per colonne le componenti di **I**,**J**,**K**, rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, cioè

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{I}\bullet\mathbf{i} & \mathbf{J}\bullet\mathbf{i} & \mathbf{K}\bullet\mathbf{i} \\ \mathbf{I}\bullet\mathbf{j} & \mathbf{J}\bullet\mathbf{j} & \mathbf{K}\bullet\mathbf{j} \\ \mathbf{I}\bullet\mathbf{k} & \mathbf{J}\bullet\mathbf{k} & \mathbf{K}\bullet\mathbf{k} \end{pmatrix}$$

Per definizione, sulla prima colonna della matrice P abbiamo scritto i coseni direttori del versore **I**, sulla seconda colonna quelli di **J** e sulla terza quelli di **K**.
Chiaramente la matrice P è una matrice ortogonale, in quanto le sue colonne formano una base ortonormale per lo spazio $\mathbb{R}^3$ con cui abbiamo identificato $\mathcal{V}_g$, secondo la convenzione 2 di pag.16. Ciò segue subito dal fatto che la somma dei quadrati dei coseni direttori è uno e che le colonne della matrice danno componenti di vettori a due a due ortogonali. Per esempio, la somma dei prodotti dei numeri sulle prime due colonne di P è il coseno dell'angolo formato dai versori **I** e **J**, che è nullo per ipotesi.
La matrice P è poi di **tipo speciale** perchè $\det P = \det P^t = \mathbf{I}\bullet\mathbf{J}\wedge\mathbf{K}=\mathbf{I}\bullet\mathbf{I}=1$.
Questa matrice è detta **la matrice della rotazione**.
In base alle formule (1.12), se $P = (p_{ij})$ e (x, y, z), (X, Y, Z) sono le coordinate nei due sistemi di riferimento, le formule della rotazione si possono scrivere, in modo esteso, nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Le predenti formule sono invertibili, nel senso che è possibile esprimere le (X, Y, Z) in funzione di (x, y, z). Per ottenere questo basta moltiplicare a sinistra ambo i membri della (1.14) per l'inversa P^{-1} della matrice P. Visto che la matrice P è ortogonale si ha $P^{-1} = P^t$, cioè l'inversa coincide con la trasposta. Quindi le formule inverse sono date da

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Si dice **traslazione** un cambiamento di coordinate tale che l'origine O del sistema di riferimento $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.U$ venga portata in un punto $O' = (a, b, c)$,

mantenendo fissi le direzioni e gli orientamenti degli assi cartesiani $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. In altre parole in tal caso viene cambiata l'origine ma restano inalterati i versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.
Il legame intercorrente fra le coordinate (x, y, z) e (x', y', z') di uno stesso punto P nei due riferimenti è particolarmente semplice.
Infatti dalla identità di Chasles, abbiamo che: $[O, P] = [O, O'] + [O', P]$. Moltiplichiamo scalarmente per il versore $\mathbf{i}$ ambo i membri della precedente. Si ha:

$$[O, P]\bullet\mathbf{i} = [O, O']\bullet\mathbf{i} + [O', P]\bullet\mathbf{i}.$$

Da cui si deduce subito che $x = a + x'$ e così via. Si hanno così le relazioni:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \\ z = c + z' \end{cases} \tag{1.16}$$

Le precedenti sono le formule di **una traslazione degli assi** che porta l'origine O in una nuova origine $O' = (a, b, c)$.

Le inverse delle (1.16) si ricavano facilmente e sono

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \\ z' = z - c \end{cases} \tag{1.17}$$

Per ottenere le formule mediante le quali si passa dal sistema $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.U$ al sistema $O'\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}.U$ si deve effettuare una **rototraslazione**, cioè una trasformazione che è il "prodotto" di una rotazione e di una traslazione. Pertanto dette (x, y, z) le coordinate del generico punto P rispetto al riferimento $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e (x', y', z') le coordinate di P rispetto al riferimento traslato $O'(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Passiamo adesso dal riferimento $O'(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ al riferimento $O'(\mathbf{I},\mathbf{J},\mathbf{K})$ e diciamo (X, Y, Z) le coordinate nel nuovo sistema; allora, per quanto detto, si ha

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Sostituendo le (1.19) nelle (1.18) si hanno le formule della rototraslazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Le precedenti, in forma estesa, si possono scrivere

$$\begin{cases} x = p_{11}X + p_{12}Y + p_{13}Z + a \\ y = p_{21}X + p_{22}Y + p_{23}Z + b \\ z = p_{31}X + p_{32}Y + p_{33}Z + c \end{cases} \tag{1.21}$$

Le inverse delle (1.21) sono date da

$$\begin{cases} X = p_{11}(x-a) + p_{21}(y-b) + p_{31}(z-c) \\ Y = p_{12}(x-a) + p_{22}(y-b) + p_{32}(z-c) \\ Z = p_{13}(x-a) + p_{23}(y-b) + p_{33}(z-c) \end{cases} \tag{1.22}$$

Certe volte è conveniente scrivere le (1.21) in modo compatto ed allora detta Q la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & a \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & b \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che si chiama **matrice della rototraslazione** e $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\underline{Y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$

si ha

$$\underline{X} = Q\underline{Y}$$

1.4 I vettori del piano

Finora abbiamo considerato vettori applicati o liberi dello spazio ordinario S. Ma in alcune applicazioni può accadere che i vettori che si considerano siano tutti appartenenti, o più in generale, paralleli ad uno stesso piano α. In tal caso tutte le considerazioni fatte sui vettori e sulle operazioni che abbiamo definito vengono semplificate notevolmente e quindi non faremo una trattazione dettagliata. Basta ragionare come segue. Si sceglie un

sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.U$ con $O \in \alpha$ e l'asse $\vec{z}$ perpendicolare ad α. Allora un qualunque vettore $\mathbf{v}$ parallelo a α o ad esso appartenente ha delle componenti del tipo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i}+\mathbf{v}_y\mathbf{j}+0\mathbf{k}$. Quindi di fatto il vettore è perfettamente determinato dalle sue prime due componenti. Ed allora per tutte le operazioni che hanno senso nell'ambito del piano possiamo limitarci a considerare solo le prime due componenti e scrivere $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i}+\mathbf{v}_y\mathbf{j}$.
Le operazioni suddette sono:
1. la somma di vettori;
2. il prodotto di un numero per un vettore;
3. il prodotto scalare.

Per esempio dati i vettori $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}_x\mathbf{i} + \mathbf{w}_y\mathbf{j}$ le operazioni mediante le componenti si effettuano con le regole seguenti:

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})_x = \mathbf{v}_x + \mathbf{w}_x; \quad (\mathbf{v}+\mathbf{w})_y = \mathbf{v}_y + \mathbf{w}_y \tag{1.23}$$

$$(a\mathbf{v})_x = a\mathbf{v}_x; \quad (a\mathbf{v})_y = a\mathbf{v}_y \tag{1.24}$$

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = \mathbf{v}_x\mathbf{w}_x + \mathbf{v}_y\mathbf{w}_y \tag{1.25}$$

Ovviamente non rientra in tale ambito il prodotto vettoriale di vettori paralleli al piano perchè, come sappiamo, il risultato è un vettore perpendicolare ad esso e quindi usciamo dalle classe di vettori considerati.

Per alcune applicazioni è bene aver presente come si particolarizzano, nel piano, le formule di una **rototraslazione**.
Se si vuole cambiare il sistema di riferimento $O\vec{x}\vec{y}$, relativo alla base ortonormale antioraria di versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ in un nuovo sistema di riferimento $O'\vec{X}\vec{Y}$ relativo alla base ortonormale antioraria di versori $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$, le formule della rototraslazione si particolarizzano nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = X\cos\vartheta - Y\sin\vartheta + a \\ y = X\sin\vartheta + Y\cos\vartheta + b \end{cases} \tag{1.26}$$

dove ϑ è l'angolo formato dai versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{I}$ e (a, b) sono le coordinate cartesiane di O' rispetto al primo riferimento.
È facile dedurre da queste le formule di una traslazione, di una rotazione e le relative inverse.

1.4.1 Coordinate polari

In un dato piano π oltre ai sistemi di riferimento cartesiano che abbiamo studiato se ne possono introdurre altri. Per molte applicazioni è utile conoscere i sistemi di **coordinati polari**.

A tale scopo si fissa un punto $O \in \pi$ detto origine e una retta orientata $\vec{p}$ passante per O, detta **asse polare**. Ad ogni punto P del piano si associa la coppia ordinata (ρ, ϑ) di numeri reali nel modo seguente:
ρ è il numero reale ≥ 0 che esprime la distanza di P da O. Mentre ϑ, con $0 \leq \vartheta < 2\pi$, è l'angolo descritto da $\vec{p}$, in senso antiorario, per sovrapporsi in modo concorde al raggio vettore $\overrightarrow{OP}$.
All'origine O vengono attribuite le coordinate polari $(0, \vartheta)$, con ϑ indeterminato. Tutti i punti della semiretta positiva $\vec{p}$ hanno coordinate del tipo $(\rho, 0)$ mentre i punti della semiretta negativa $\vec{p}$ hanno coordinate del tipo (ρ, π).
I punti che soddisfano la condizione $\rho = r$ sono i punti della circonferenza di centro O e raggio r. Ed ancora i punti tali che sia $\vartheta = k$, con k costante, sono i punti della semiretta uscente da O che forma con $\vec{p}$ un angolo di k radianti.
Troviamo le relazioni che intercorrono tra le coordinate polari e le coordinate cartesiane. Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $O\vec{x}\vec{y}$, con $\vec{x} = \vec{p}$.

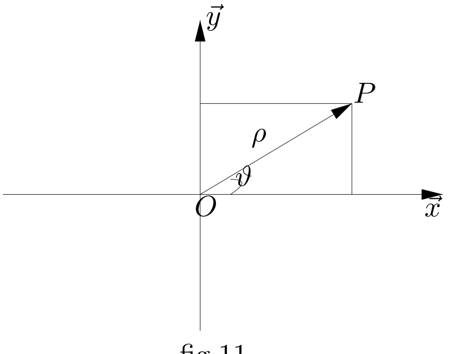


fig.11

Se il punto P ha coordinate cartesiane (x, y) e coordinate polari (ρ, ϑ) il legame fra queste è dato da:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \tag{1.27}$$

Quindi le (1.27) permettono di trovare (x, y) una volta noti (ρ, ϑ). Viceversa se vogliamo determinare (ρ, ϑ) una volta noti (x, y) dobbiamo trovare le inverse delle (1.27). Quadrando ambo i membri delle (1.27) e sommando si deduce $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e ϑ è l'angolo soddisfacente le seguenti:

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{1.28}$$

1.5 Coordinate polari e cilindriche nello spazio

Nello spazio le coordinate polari e cilindriche, dette anche coordinate semi-polari, sono delle naturali generalizzazioni delle coordinate polari introdotte nel piano, che si rivelano utili quando si vogliono studiare proprietà di figure che hanno particolari simmetrie.
Cominciamo con l'introdurre le coordinate polari nello spazio. Per fare ciò si fissi:
un punto O, detto polo delle coordinate;
una retta orientata $\vec{p}$ passante per O, detta asse polare;
un semipiano π, di origine $\vec{p}$, detto semipiano polare;
una unità di misura per le lunghezze.

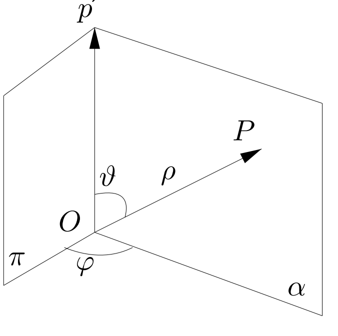


fig.12

Ciò posto, un punto $P \notin \vec{p}$ individua univocamente la terna ordinata di numeri reali $(\rho, \varphi, \vartheta)$ così definita:
$\rho = d(O, P)$;
$\varphi =$ rotazione antioraria attorno a $\vec{p}$ che il semipiano π deve compiere per sovrapporsi al semipiano $\alpha = \vec{p}P$;
$\vartheta =$ angolo di $\vec{p}$ col vettore (O, P).
Se il punto $P \in \vec{p}$ allora φ è indeterminato e $\vartheta = 0$ se P appartiene alla semiretta positiva $\vec{p}$, mentre $\vartheta = \pi$ se P appartiene alla semiretta negativa; anche ϑ è indeterminato se $P = O$.

Dalla definizione data segue immediatamente che:

$$\rho \geq 0; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

Viceversa data una qualunque terna di numeri $(\rho, \varphi, \vartheta)$, soddisfacenti le precedenti condizioni, esiste un unico punto P avente quei numeri come sue coordinate polari.
Per esempio i punti tali che sia $\rho = r$ sono quelli della sfera di centro l'origine O e raggio r.
I punti tali che sia $\varphi = \pi/2$ sono quelli del semipiano ottenuto ruotando il semipiano polare di un angolo retto in senso antiorario attorno all'asse polare.
I punti tali che $\vartheta = \pi/3$ sono quelli del semicono di vertice O luogo delle semirette uscenti da O e che formano con l'asse polare $\vec{p}$ un angolo di $\pi/3$.
Dato in S il sistema di riferimento cartesiano $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.U$ fissiamo un sistema di coordinate polari nel modo seguente: sia O il polo, l'asse delle $\vec{z}$ l'asse polare e il semipiano $\vec{y}\vec{z}$, dalla parte delle $\vec{y}$ positive, il semipiano polare. Allora se P ha coordinate cartesiane (x, y, z) e coordinate polari $(\rho, \varphi, \vartheta)$ il legame fra queste coordinate è espresso dalle relazioni:

$$x = \rho \cos\varphi \sin\vartheta \quad y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \quad z = \rho \cos\vartheta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Per fissare nello spazio un sistema di **coordinate cilindriche** bisogna assegnare:
–un piano α;
–un sistema di coordinate polari $(O, \vec{p})$ su α;
–una retta orientata $\vec{z}$ per O perpendicolare al piano α, ed un versore $\mathbf{k}$ che determina l'orientamento su $\vec{z}$;
–il verso positivo di rotazione su α, che è quello antiorario per un osservatore che guardi il verso positivo di $\vec{z}$.

Ciò posto, detto P un qualunque punto dello spazio le sue coordinate cilindriche (ρ, ϑ, z) sono così determinate:

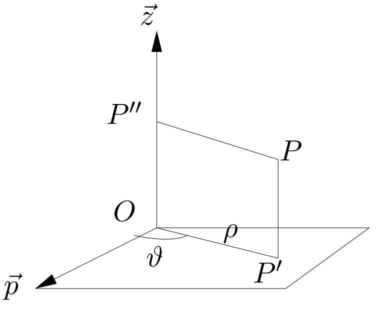


fig.13

ρ è uguale alla distanza di O da P;
ϑ è la rotazione indicata in figura;
z la misura del segmento orientato (O, P'').
In tal modo c'è una corrispondenza biunivoca tra tutti i punti diversi da O e le terne $(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che:
$\rho > 0$; $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Il punto O ha coordinate cilindriche $\rho = 0$; $z = 0$; ϑ indeterminato.
In tal caso le relazioni tra coordinate cilindriche e coordinate cartesiane sono facili da determinare e vengono lasciate per esercizio.

Capitolo 2

Geometria lineare nel piano

2.1 Coordinate omogenee

In un piano, che supponiamo assegnato una volta per tutte, sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}.U$, di origine O associato alla coppia antioraria di versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.
Nel capitolo precedente abbiamo visto che ad ogni punto P del piano si associano le sue coordinate cartesiane reali (x, y). D'ora in poi diremo che (x, y) sono le **coordinate non omogenee** del punto P, e diremo che P è un punto **proprio**.
Ma ad ogni punto $P = (x, y)$ del piano si possono associare anche altre coordinate, che vengono dette le sue **coordinate omogenee** o **proiettive**. Esse sono le terne ordinate (x', y', t') di numeri reali, con $t' \neq 0$, definite a meno di un fattore di proporzionalità, tali che:

$$x = \frac{x'}{t'}, \quad y = \frac{y'}{t'} \tag{2.1}$$

Per esempio il punto P di coordinate omogenee $(1, -1, -2)$ ha $(-1/2, 1/2)$ come coordinate non omogenee, mentre al punto $P' = (1, 3)$ si possono attribuire le coordinate omogenee $(1, 3, 1)$ o una qualunque terna di numeri proporzionale a questa, per esempio $(2, 6, 2)$. Nei casi considerati vengono soddisfatte le relazioni (2.1) che legano le coordinate omogenee a quelle non omogenee.

Ma è conveniente *ampliare* il piano ordinario, introducendo i **punti impropri e i punti immaginari**, che sono punti di natura diversa rispetto ai

punti propri reali che abbiamo finora considerato. Il nuovo ambiente è detto il **piano proiettivo complesso** $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^2$.
Noi svilupperemo la nostra teoria nel piano così ampliato, per cui molti risultati e teoremi potranno essere espressi in modo unitario ed elegante, in un senso che è difficile precisare adesso, ma che di volta in volta verrà chiarito.

Un punto P si dice **improprio** quando le sue coordinate omogenee sono del tipo $(x', y', 0)$, con la terza coordinata omogenea nulla, ed x' e y' non entrambe nulle.

Un punto proprio P di cui sono date le coordinate non omogenee è **immaginario** quando almeno una di tali coordinate è un numero complesso, non reale.

Se invece un punto P è espresso in coordinate omogenee perché esso sia un punto immaginario deve accadere che le sue coordinate omogenee non si possano rendere tutte reali mediante la moltiplicazione per un fattore di proporzionalità non nullo. Per esempio il punto di coordinate omogenee $(2i, -i, 3i)$ è un punto reale, in quanto moltiplicando per il fattore di proporzionalità i si ottiene la terna reale $(-2, 1, -3)$. Mentre il punto di coordinate $(2i, 2, i)$ è un punto immaginario.

Per come sono state definite le coordinate omogenee, alla terna nulla $(0, 0, 0)$ non si associa alcun punto.

Ovviamente i punti impropri e i punti immaginari non vengono "rappresentati" con punti del piano come accade per i punti propri e reali.

Il punto $P = (1, 2, 0)$ è un punto improprio; tutti i punti impropri del piano sono caratterizzati dall'avere la terza coordinata omogenea $t' = 0$.

2.2 Rette del piano e loro equazioni

Studiamo adesso le rette reali del piano mediante equazioni che si associano ad esse nel modo che ora descriveremo.

Una retta reale r del piano è perfettamente determinata assegnando un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e un vettore **direttivo** non nullo $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$ ad essa parallelo.
Tutti i punti $P \in r$ si possono caratterizzare come i punti tali che il vettore $[P_0, P]$ è parallelo a $\mathbf{v}$. Ricordando che due vettori liberi sono paralleli quando esiste uno scalare t tale che il primo vettore è uguale al prodotto di

t per il secondo, nel nostro caso si ha:

$$[P_0, P] = t\mathbf{v} \tag{2.2}$$

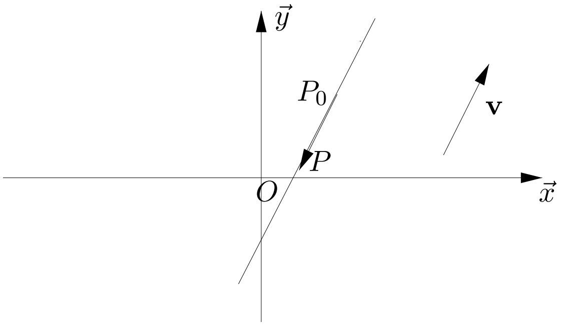


fig.14

La (2.2) si chiama **l'equazione vettoriale di** r. Da questa, eguagliando le componenti, si ottengono le equazioni parametriche scalari, cioè

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,l \\ y = y_0 + t\,m \end{cases} \tag{2.3}$$

Le componenti di un vettore non nullo parallelo ad r si chiamano **parametri direttori** della retta. Se dalle (2.3) si elimina il parametro t si ottiene l'equazione **cartesiana della retta** r. Se $l = 0$ l'eliminazione dà luogo alla equazione $x = x_0$, che è l'equazione della retta per P_0 parallela all'asse $\vec{y}$; se $m = 0$ si ottiene $y = y_0$, che è l'equazione della retta per P_0 parallela all'asse $\vec{x}$.

Se $l, m \neq 0$, si deduce che

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{2.4}$$

Con le posizioni $m = a$, $-l = b$, $-mx_0 + ly_0 = c$ si vede che alla retta r si può sempre associare l'equazione

$$ax + by + c = 0 \tag{2.5}$$

Come è noto una retta r reale è perfettamente determinata se si assegnano due suoi punti propri distinti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$. Tutti i punti $P \in r$ si possono caratterizzare come i punti tali che il vettore $[P_0, P]$ sia parallelo al vettore $[P_0, P_1]$. In tal caso il vettore $[P_0, P_1]$ ha il ruolo di **vettore direttivo**. Per cui l'equazione vettoriale della retta P_0P_1 si può scrivere:

$$[P_0, P] = t[P_0, P_1] \tag{2.6}$$

Se la (2.6) si scrive in componenti si hanno le equazioni parametriche scalari della retta P_0P_1:

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \end{cases} \tag{2.7}$$

Se $x_0 = x_1$ l'equazione della retta in forma cartesiana è $x = x_0$ e la retta risulta parallela all'asse delle $\vec{y}$; se $y_0 = y_1$ l'equazione della retta in forma cartesiana è $y = y_0$ e la retta è parallela all'asse delle $\vec{x}$; se ciò non accade, eliminando il parametro t si ottiene l'equazione della retta nella forma

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{2.8}$$

Una retta r si può inoltre pensare individuata da un suo punto P_0 ed un vettore non nullo $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ad essa ortogonale. In tal caso r è il luogo geometrico dei punti P del piano tali che il vettore $[P_0, P]$ è ortogonale ad $\mathbf{n}$. Ciò si verifica se e solo se $[P_0, P]\bullet\mathbf{n} = 0$, ved. fig.15. Scrivendo la precedente in componenti si ha

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \tag{2.9}$$

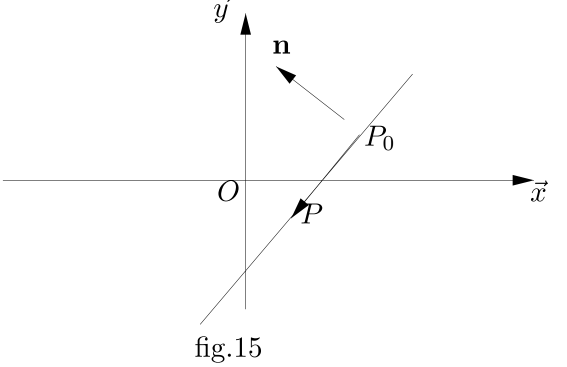


fig.15

La (2.9) si chiama l'equazione della retta per $P_0 = (x_0, y_0)$ perpendicolare al vettore $\mathbf{n}$. Ponendo $-ax_0 - by_0 = c$ essa diventa $ax + by + c = 0$, che come si vede è analoga alla (2.5).

In definitiva tutto quanto precede porta a dire che data una qualunque retta r essa si può **rappresentare** con una equazione lineare $ax+by+c=0$, con $(a,b) \neq (0,0)$, nel senso che tutti e soli i punti di $P \in r$ soddisfano con le loro coordinate tale equazione.

Viceversa data una qualunque equazione $ax+by+c=0$ con $(a,b) \neq (0,0)$ essa è sempre l'equazione di una ben determinata retta r del piano.

Infatti sia (x_0, y_0) una qualunque soluzione dell'equazione; allora deve aversi $ax_0 + by_0 + c = 0$. Ricavando c e sostituendo nell'equazione data si vede che essa si può scrivere $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Allora l'equazione data è l'equazione della retta passante per $P_0 = (x_0, y_0)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

Dai ragionamenti fatti si deduce che si ha una "corrispondenza biunivoca" fra l'insieme di tutte le rette del piano e l'insieme delle equazioni del tipo $ax+by+c=0$, con $(a,b) \neq (0,0)$, purché si "identifichino" equazioni equivalenti ovvero equazioni aventi i coefficienti proporzionali. Ciò deriva dal fatto che il modulo del vettore normale ad r è ininfluente al fine di determinare l'equazione di r; se infatti $\mathbf{n}'$ è parallelo ad $\mathbf{n}$ si ha $\mathbf{n}' = \rho\,\mathbf{n}$ e imponendo che $\mathbf{n}'$ sia perpendicolare al vettore $[P_0, P]$ si ottiene l'equazione $\rho[a(x-x_0)+b(y-y_0)]=0$, che è equivalente alla $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

In definitiva perché due equazioni rappresentino la stessa retta deve accadere che le due equazioni abbiano i coefficienti proporzionali.

Osservazione 3 *Se l'equazione della retta r è $ax+by+c=0$ con $(a,b) \neq (0,0)$, i numeri (a,b) sono parametri direttori di un vettore ortogonale alla retta r; mentre $(b,-a)$ sono parametri direttori di un vettore parallelo ad r.*

Alcuni semplici esempi

Esempio 4 *Dato il punto $P=(1,-1)$ e il vettore $\mathbf{v} = -2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ scrivere:*
a) l'equazione della retta r per P parallela a $\mathbf{v}$;
b) l'equazione della retta s per P perpendicolare a $\mathbf{v}$.

Soluzione. Per rispondere alla a) diamo le equazioni parametriche della retta:

$$r) \qquad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$$

da cui, eliminando il parametro t, si ottiene l'equazione cartesiana $3x+2y-1=0$.

b) Per trovare l'equazione della retta s basta applicare la formula $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, dove (a,b) sono le componenti di un vettore perpendicolare alla retta. Nel nostro caso si ha $-2(x-1)+3(y+1)=0$, cioè $2x-3y-5=0$.

Esempio 5 *Date le equazioni parametriche di una retta*
$r)\quad \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1-t \end{cases}$ *trovare*
a) le equazioni parametriche della retta s passante per $P=(2,-3)$ e parallela ad r;
b) l'equazione cartesiana della retta t per $P=(-1,2)$ perpendicolare ad r.

Soluzione. Per rispondere alla a) basta scrivere $s)\quad \begin{cases} x = 2-2t \\ y = -3-t \end{cases}$.
Per b) basta utilizzare la formula $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, dove (a,b) sono le componenti di un vettore perpendicolare alla retta. Nel nostro caso si ha: $-2(x+1)-(y-2)=0$, cioè $2x+y=0$. □

In tutto quanto precede si è visto che una qualunque retta r del piano si può rappresentare con una equazione lineare del tipo $ax+by+c=0$, con $(a,b)\neq(0,0)$. Riferiamoci adesso alle coordinate omogenee dei punti **propri** del piano. Cioè introduciamo le terne (x',y',t'), con $t'\neq 0$, e tali che $x=\dfrac{x'}{t'}$, $\quad y=\dfrac{y'}{t'}$.
Sostituendo tali valori nell'equazione della retta considerata, essa si trasforma nella

$$a\Big(\frac{x'}{t'}\Big)+b\Big(\frac{y'}{t'}\Big)+c=0 \tag{2.10}$$

Moltiplicando per t' ambo i membri si ottiene un'equazione equivalente, cioè $ax'+by'+ct'=0$, la quale è un'equazione lineare e omogenea nelle variabili x',y',t'. Possiamo allora dire che tale equazione è l'equazione della nostra retta in **forma omogenea**; essa è soddisfatta dalle coordinate omogenee di tutti e soli i punti propri della retta r.

A questo punto ci chiediamo se ci sono punti impropri che soddisfano la nostra equazione; per ricercare tali punti bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' + ct' = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Visto che $(a, b) \neq (0, 0)$, si deduce che il sistema (2.11) è soddisfatto dal **punto improprio** $(b, -a, 0)$.

Ricordiamo che tutti i punti impropri del piano sono caratterizzati dall'avere la terza coordinata omogenea $t' = 0$. Tale luogo di punti viene detto **la retta impropria** del piano.

Si può quindi affermare che

le rette del piano si possono rappresentare mediante equazioni del tipo $ax' + by' + ct' = 0$. Queste rette sono proprie se $(a, b) \neq (0, 0)$, altrimenti si ha la retta impropria di equazione $t' = 0$.

Osservazione 4 *Supponiamo che $ax + by + c = 0$ sia l'equazione di una retta propria r. Se $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ allora la retta r non passa per l'origine e incontra gli assi coordinati nei punti di coordinate $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{-c}{b}\right)$. Ponendo $p = \frac{-c}{a}$ e $q = \frac{-c}{b}$ l'equazione della nostra retta si può scrivere nella forma, detta* **segmentaria**,

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

dove p e q rappresentano in valore e segno le distanze dall'origine dei punti che la retta r ha a comune con gli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Osservazione 5 *Se l ed m sono i parametri direttori di una retta propria r, essi sono le prime due coordinate del punto improprio di r.*

Dimostrazione. Se la retta r è scritta nella forma

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

ricordando che le coordinate del punto improprio di una retta in forma cartesiana $ax + by + c = 0$ sono $(b, -a, 0)$, segue l'asserto.

2.3 Mutua posizione di due rette

Supponiamo che siano date due rette *reali, proprie e distinte* r ed r' rispettivamente di equazioni $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$. Come sappiamo i coefficienti (a,b) e (a',b') sono componenti di vettori $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ normali rispettivamente ad r ed r'. Allora è ovvio che:

$$r \textbf{ è parallela a } r' \Longleftrightarrow \mathbf{n} \parallel \mathbf{n}'$$

ciò è equivalente a dire che esiste un fattore ρ di proporzionalità tale che $(a,b)=\rho(a',b')$, che è equivalente alla condizione $ab'-a'b=0$.

$$r \textbf{ è perpendicolare a } r' \Longleftrightarrow \mathbf{n} \perp \mathbf{n}' \Longleftrightarrow \mathbf{n}\bullet\mathbf{n}'=0$$

ciò è equivalente alla condizione $aa'+bb'=0$.

Supponiamo adesso di volere calcolare gli angoli formati dalle due rette non orientate r ed r', incidenti in un punto proprio $\overline{P}$. Tali rette suddividono il piano in quattro regioni o angoli, a due a due uguali. Diciamo α e β tali angoli; ved. la figura seguente

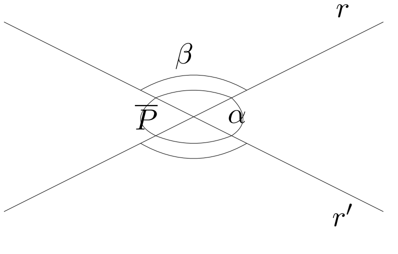


fig.16

Ora tenuto conto della nozione di angolo fra vettori e del fatto che per individuare le rette r ed r' si possono scegliere vettori normali $\mathbf{n}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ ed $\mathbf{n}'=a'\mathbf{i}+b'\mathbf{j}$ comunque orientati, si ha che $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ sono dati dalla formula

$$\pm\cos\widehat{\mathbf{n}\mathbf{n}'} = \pm\frac{\mathbf{n}\bullet\mathbf{n}'}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{n}'|} = \pm\frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2}} \tag{2.12}$$

2.4 Intersezioni fra rette

Date due rette *distinte* r ed r', di equazioni omogenee rispettivamente $ax'+by'+ct'=0$ e $a'x'+b'y'+c't'=0$; per trovare i punti comuni si deve risolvere il sistema formato dalle loro equazioni

$$\begin{cases} ax'+by'+ct'=0 \\ a'x'+b'y'+c't'=0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Studiando la teoria riguardante i sistemi lineari, vedremo che tale sistema ha una sola soluzione, non nulla e a meno di un fattore di proporzionalità, data da

$$[\rho(bc'-b'c),\rho(ca'-ac'),\rho(ab'-a'b)] \tag{2.14}$$

con ρ parametro arbitrario non nullo; quindi due rette distinte hanno sempre un solo punto a comune di cui le (2.14) sono le coordinate omogenee. Esaminiamo il risultato, a seconda che $ab'-a'b \neq 0$ oppure $ab'-a'b=0$.

Se $ab'-a'b \neq 0$ le due rette si incontrano nel punto proprio di coordinate non omogenee $\overline{x}=\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$; $\overline{y}=\dfrac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$, e le due rette si dicono *incidenti.*

Se invece $ab'-a'b=0$ il punto comune alle due rette è improprio. Ed allora, se una delle rette, per esempio r', è la retta impropria, esse si incontrano, come abbiamo visto, nel punto improprio $(b,-a,0)$ della retta r.

Se entrambe le rette sono proprie, la condizione $ab'-ab'=0$ è la condizione di parallelismo ed in tal caso, ponendo $a'=\mu a$; $b'=\mu b$, il sistema (2.13) ammette la soluzione $(b,-a,0)$.

La conclusione è che

due rette distinte e proprie si incontrano in uno e in un solo punto, che è improprio se e solo se le rette sono parallele.

Esaminiamo alcuni semplici esempi.

Esempio 6 *Trovare l'intersezione delle rette*

$$r)\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \end{cases} \qquad s)\begin{cases} x=1-3t \\ y=1+t \end{cases}$$

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che se $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$ sono le equazioni parametriche scalari di una retta r, allora c'è una corrispondenza biunivoca tra i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ e i punti $P=(x=x_0+lt, y=y_0+mt)$

della retta r. Se si vogliono trovare punti Q comuni alle due rette r ed s si devono determinare due valori dei parametri t' e t'', in generale distinti, per cui si deduca dalle equazioni di r e di s che il punto Q abbia uguali coordinate.
Nel nostro caso deve essere

$$\begin{cases} 2-t'=1-3t'' \\ -1+2t'=1+t'' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t'-3t''=1 \\ 2t'-t''=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t'=1 \\ t''=0 \end{cases}$$

In tal caso le due rette si incontrano nel punto Q di coordinate $(1,1)$, che si possono ottenere dalle equazioni di r, per $t'=1$ oppure dalle equazioni di s, per $t''=0$.

Esempio 7 *Trovare l'intersezione delle rette*

$$r)\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \end{cases} \quad s)\begin{cases} x=-4t \\ y=-1+2t \end{cases}$$

Soluzione. In tal caso si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1+2t'=-4t'' \\ -1-t'=-1+2t'' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2t'+4t''=-1 \\ t'+2t''=0 \end{cases}$$

Tale sistema è ovviamente incompatibile, e quindi le due rette non hanno punti propri a comune. Le due rette hanno parametri direttori proporzionali e quindi sono parallele. Esse hanno a comune il punto improprio $(2,-1,0)$.

Esempio 8 *Trovare l'intersezione delle rette* $r)\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \end{cases}$ *ed* $s)\ 2x-3y+1=0$.

Soluzione. In tal caso basta sostituire i valori di x e y di r nell'equazione di s; si ottiene la risolvente $2+4t+3+3t+1=0$. Quindi $t=\dfrac{-6}{7}$, e sostituendo nelle equazioni parametriche si ottiene il punto comune $\left(\dfrac{-5}{7},\dfrac{-1}{7}\right)$.

2.4.1 Rette immaginarie

In 2.1 sono stati introdotti i punti immaginari; adesso definiamo le rette immaginarie.
Queste sono rappresentate da equazioni del tipo

$$z_1x'+z_2y'+z_3t'=0 \tag{2.15}$$

con z_1, z_2, z_3 numeri complessi, non tutti e tre nulli, tali che non ci sia una equazione "equivalente" a coefficienti tutti reali.

Per esempio l'equazione $ix' + y' - (i+1)t' = 0$ è l'equazione di una retta immaginaria, mentre $ix' - iy' = 0$ è l'equazione della retta reale $x' - y' = 0$.

Una interessante proprietà riguardante le rette immaginarie è la seguente

Proposizione 8 *Il punto comune a due rette immaginarie coniugate* $r)\ z_1x' + z_2y' + z_3t' = 0$ *e* $\overline{r})\ \overline{z}_1x' + \overline{z}_2y' + \overline{z}_3t' = 0$ *è un punto reale.*

Dimostrazione. Il punto comune alle due rette si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (a_1 + ib_1)x' + (a_2 + ib_2)y' + (a_3 + ib_3)t' = 0 \\ (a_1 - ib_1)x' + (a_2 - ib_2)y' + (a_3 - ib_3)t' = 0 \end{cases}$$

dove abbiamo posto $z_r = a_r + ib_r$, per $= 1, 2, 3$ e $\overline{z}_r = a_r - ib_r$ è il complesso coniugato di z_r. Dal precedente sistema, sommando e sottraendo membro a membro, si ottiene sempre un sistema equivalente costituito da due equazioni reali. $\square$

2.5 Il coefficiente angolare di una retta

Consideriamo una retta propria r di equazione $ax + by + c = 0$. È chiaro che se $a = 0$ allora la retta è parallela all'asse delle $\vec{x}$ ed ha equazione $y = -\dfrac{c}{b}$; se $b = 0$ la retta è parallela all'asse delle $\vec{y}$ ed ha equazione $x = -\dfrac{c}{a}$. Se $a, b \neq 0$ allora la retta r non è parallela a nessuno degli assi e forma con l'asse delle $\vec{x}$ due angoli supplementari che chiamiamo α e β. Vedi la figura seguente

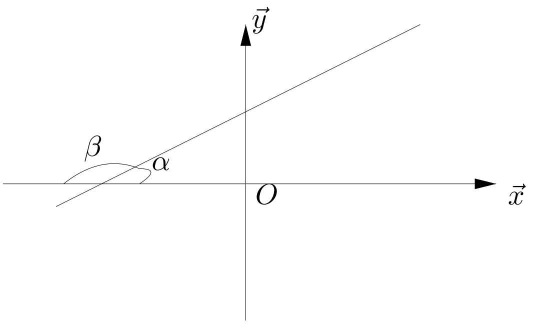


fig.17

L'angolo α è l'angolo minimo di cui deve ruotare $\vec{x}$, in senso antiorario, per sovrapporsi ad r.
Consideriamo la retta r' passante per O e parallela ad r; essa ha equazione $ax+by=0$. Sia A il punto $A=(1,0)$ e P il punto sulla retta r' di coordinate $P=\left(1,-\frac{a}{b}\right)$. Dal triangolo rettangolo OAP si deduce che $\tan\alpha=-\frac{a}{b}$, in valore e segno, sia che α è un angolo acuto che ottuso. Tale numero $-\frac{a}{b}$ si indica con m e si chiama **il coefficiente angolare** della retta r.

Se la retta r è parallela all'asse delle $\vec{x}$, cioè $a=0$, il coefficiente angolare è $m=0$. Ovviamente non si definisce il coeffiente angolare di una retta parallela all'asse delle $\vec{y}$.

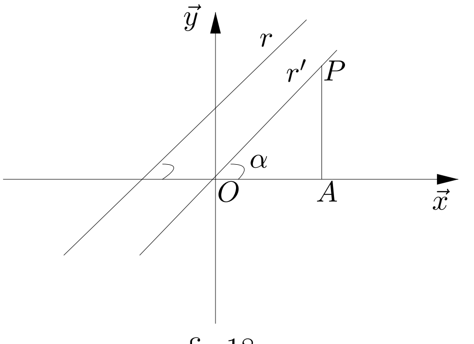


fig.18

Osservazione 6 *Se si ha l'equazione di una retta nella forma di congiungente i due punti $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$, cioè*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

il coefficiente angolare si ottiene dalla formula

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Dalle condizioni di ortogonalità e parallelismo fra rette si deduce subito il

Corollario 3 *Condizione necessaria e sufficente perché due rette di coefficienti angolari m ed m' siano parallele è che abbiano gli stessi coefficienti angolari, cioè $m=m'$.*

Condizione necessaria e sufficiente perché le due rette siano perpendicolari è che abbiano coefficienti angolari l'uno opposto e reciproco dell'altro, cioè $m' = -\dfrac{1}{m}$.

Osservazione 7 *Se* $ax' + by' + ct' = 0$ *è l'equazione omogenea di una retta propria* r*, il suo punto improprio ha coordinate* $(b, -a, 0)$*. Se* r *non è parallela all'asse delle* $\vec{y}$ *il suo coefficiente angolare* $m = -\dfrac{a}{b}$ *si ottiene dividendo la seconda coordinata omogenea del punto improprio per la prima.*

2.6 Fasci di rette

Siano date due rette r ed r' distinte di equazioni rispettivamente $ax' + by' + ct' = 0$ e $a'x' + b'y + c't' = 0$. Per quanto visto le due rette si incontrano in un solo punto $\overline{P}$, proprio o improprio. Per il momento, non facciamo alcuna distinzione fra i due casi.
Definiamo **fascio di rette**, individuato da r ed r', la totalità delle rette la cui equazione si ottiene facendo una combinazione lineare delle equazioni delle due rette

$$\lambda(ax' + by' + ct') + \mu(a'x' + b'y' + c't') = 0 \tag{2.16}$$

con λ e μ parametri non entrambi nulli.
È chiaro che per individuare una retta del fascio si devono assegnare λ e μ, a meno di un fattore di proporzionalità, o ciò che è lo stesso si deve trovare il rapporto $\dfrac{\lambda}{\mu}$ oppure $\dfrac{\mu}{\lambda}$.
Detto $\overline{Q} = (x_0, y_0, t_0)$ un qualunque punto del piano distinto da $\overline{P}$. Imponendo alla generica retta del fascio di passare per $\overline{Q}$ si ha la condizione $\lambda(ax_0 + by_0 + ct_0) + \mu(a'x_0 + b'y_0 + c't_0) = 0$. Poiché la precedente non è una identità, si possono determinare λ e μ, a meno di un fattore di proporzionalità, e quindi c'è una sola retta del fascio passante per $\overline{Q}$.

Riferiamoci all'equazione (2.16) del fascio individuato dalle rette r ed r'. Nelle applicazioni è talvolta utile scrivere l'equazione del **fascio in forma non omogenea** e cioè con un solo parametro. Ciò è possibile in quanto i parametri λ e μ non sono entrambi nulli; se, per fissare le idee, $\lambda \neq 0$, dividendo ambo i membri della precedente per λ e ponendo $\dfrac{\mu}{\lambda} = h$ il fascio si può scrivere nella forma

$$(ax' + by' + ct') + h(a'x' + b'y' + c't') = 0 \tag{2.17}$$

In tal modo si considerano tutte le rette del fascio, con l'esclusione della retta di equazione $a'x' + b'y' + c't' = 0$ che si ottiene dall'equazione omogenea per $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$.

Proposizione 9 *Le rette del fascio, individuato da r ed r', sono tutte e sole le rette passanti per $\overline{P} = r \cap r'$.*

Dimostrazione. Tutte le rette del fascio passano per $\overline{P}$, in quanto si ha $\lambda 0 + \mu 0 = 0$, per ogni coppia $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e quindi la condizione di appartenenza di $\overline{P}$ alla generica retta di (2.16) è sempre soddisfatta.
Viceversa sia t una qualunque retta passante per $\overline{P}$; sia $\overline{Q}$ un qualunque punto di t distinto da $\overline{P}$. Per quanto abbiamo osservato c'è una sola retta t' del fascio passante per $\overline{Q}$; ma le rette del fascio passano tutte anche per $\overline{P}$. Quindi le due rette t e t', avendo due punti distinti a comune, coincidono. Se ne conclude che la retta t è una retta del fascio.

Tale risultato comporta il seguente

Corollario 4 *Se le rette r ed r' con cui abbiamo individuato il fascio sono incidenti in un punto proprio, allora le rette del fascio sono tutte e sole le rette passanti per tale punto.*
Se le rette con cui abbiamo individuato il fascio sono parallele, allora le rette del fascio sono tutte e sole le rette parallele alle rette date.

È immediato osservare che un fascio di rette è individuato da due sue qualunque rette.

L'equazione $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ è l'equazione del fascio delle rette passanti per il punto $P_0 = (x_0, y_0)$.
Tale fascio si può scrivere nella forma non omogenea $y - y_0 = m(x - x_0)$, con $m = -\dfrac{a}{b}$; in tal caso, come sappiamo, viene esclusa la retta $x = x_0$.

2.7 Distanze

Sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}.U$.
Sia $ax+by+c = 0$ l'equazione di una retta propria e reale r e $P_0 = (x_0, y_0)$ un

qualunque punto proprio. Come è noto la **distanza di P_0 da r** si definisce come la distanza del punto P_0 dal piede H della perpendicolare condotta da P_0 alla retta r, e si suole indicare $d(P_0, r)$.
Si prova subito che la

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.18}$$

Dimostrazione. Detto $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto di r deve accadere, per la condizione di appartenenza, che $ax_1 + by_1 + c = 0$, da cui $c = -ax_1 - by_1$. Sostituendo tale valore nell'equazione data si ha $a(x-x_1)+b(y-y_1) = 0$. Ora è chiaro che la distanza $d(P_0, r)$ è data dal valore assoluto della proiezione del vettore $[P_1, P_0]$ su un versore $\mathbf{n}' = \dfrac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ perpendicolare alla retta r.
Si ha quindi

$$d(P_0, r) = \left| [P_1, P_0] \bullet \frac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Tenuto conto che $c = -ax_1 - by_1$ si ottiene subito il risultato (2.18).
La fig.19 aiuta a comprendere i ragionamenti fatti.

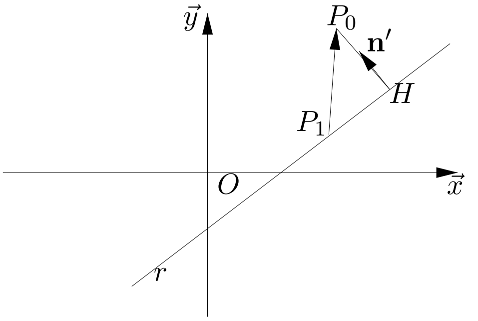


fig.19

2.8 Alcuni esempi

In conclusione riportiamo alcuni esempi attraverso i quali lo studente potrà verificare il proprio livello di preparazione, non trascurando però di approfondirla mediante ulteriori esercizi che certamente verranno proposti in classe dal docente.

Esempio 9 *Date le due rette* r *ed* s *di equazioni rispettivamente*
$r)$ $3x-2y+2=0$ *ed* $s)$ $x-y+2=0$, *sia* Σ *il fascio da esse determinato.*
a) Trovare il centro del fascio e le due rette di Σ *una parallela e l'altra perpendicolare alla retta* $t)$ $x+2y=0$.
b) Trovare le rette di Σ *che formano con gli assi cartesiani* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *un triangolo di area 3.*
c) Determinare le rette di Σ *che formano con la retta* u *di equazione* $x-y=0$ *un angolo il cui coseno è* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluzione. Rispondiamo ad a). Per trovare il centro del fascio basta trovare il punto comune a due qualunque rette del fascio, per esempio r ed s stesse. Quindi il centro C ha coordinate che si trovano risolvendo il sistema
$\begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$ da cui si trae $C=(2,4)$.
L'equazione della generica retta del fascio Σ è data da una combinazione lineare delle equazioni di r ed s; quindi $\lambda(3x-2y+2)+\mu(x-y+2)=0$ che si può anche scrivere nella forma

$$(3\lambda+\mu)x+(-2\lambda-\mu)y+2\lambda+2\mu=0$$

Ricordando che due rette, in forma cartesiana $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$ sono parallele se e solo se $ab'-a'b=0$ e sono perpendicolari se e solo se $aa'+bb'=0$, nel nostro caso si ha, per il parallelismo,
$2(3\lambda+\mu)+2\lambda+\mu=0$; da ciò si ha $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{-3}{8}$, e quindi la retta ha equazione $x+2y-10=0$.
Per la perpendicolarità, si ha la condizione $3\lambda+\mu+2(-2\lambda-\mu)=0$ da cui $\lambda=-\mu$ e l'equazione della retta perpendicolare è $2x-y=0$.
b) Perché una retta del fascio Σ formi con gli assi coordinati un triangolo, essa non dev'essere parallela ai due assi; pertanto dovrà essere $3\lambda+\mu\neq 0$ e $2\lambda+\mu\neq 0$. In tal caso la generica retta del fascio Σ incontra gli assi nei

punti di coordinate $A = \left(\dfrac{-2\lambda - 2\mu}{3\lambda + \mu}, 0\right)$ e $B = \left(0, \dfrac{2\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu}\right)$. L'area S del triangolo OAB è data dal semiprodotto delle misure dei cateti, e quindi è

$$S = \frac{1}{2}\left|\frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + \mu} \cdot \frac{2\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu}\right| = 3$$

Bisogna fare molta attenzione a non confondere, per esempio, l'ascissa del punto A con la misura del cateto OA. Da ciò deriva l'uso del valore assoluto nella precedente formula.
Tenendo conto della presenza del valore assoluto, dopo semplici calcoli, si arriva alla risolvente del problema

$$2\lambda^2 + 2\mu^2 + 4\lambda\mu = \pm 3(6\lambda^2 + 5\lambda\mu + \mu^2)$$

Prendendo il segno positivo si ha l'equazione omogenea di secondo grado $16\lambda^2 + 11\lambda\mu + \mu^2 = 0$ che nel rapporto $\dfrac{\lambda}{\mu}$ ha le due soluzioni $\dfrac{-11 \pm \sqrt{57}}{32}$, a cui corrispondono due rette del fascio le cui equazioni si ottengono dall'equazione di Σ sostituendo a λ e μ i valori trovati.
Scegliendo nella risolvente il segno negativo, dopo semplici calcoli, si trova una equazione omogenea priva di radici reali.

c) Sappiamo che la formula (2.12) fornisce il coseno dei due angoli formati dalle due rette; nel nostro caso, detto α uno degli angoli formati fra le generica retta del fascio e la retta u, si ha

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{3\lambda + \mu + 2\lambda + \mu}{\sqrt{2}\sqrt{13\lambda^2 + 10\lambda\mu + 2\mu^2}}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{-5 \pm 1}{12}$. Si ottengono due rette una ottenuta sostituendo nell'equazione di Σ, a $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{-1}{2}$ l'altra $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{-1}{3}$.

Esempio 10 *Siano dati i punti* $O = (0, 0)$, $A = (3, 2)$, $B = \left(\dfrac{15}{13}, \dfrac{-10}{13}\right)$. *Essi determinano un triangolo OAB.*
a) Determinare la sua area.
b) Verificare che le altezze relative ai tre lati OA,OB e AB passano tutte per uno stesso punto (ortocentro).

c) Verificare che anche le bisettrici degli angoli formati dai lati passano per uno stesso punto (incentro).

Soluzione. Per meglio comprendere quanto viene fatto è bene riferirsi alla figura seguente

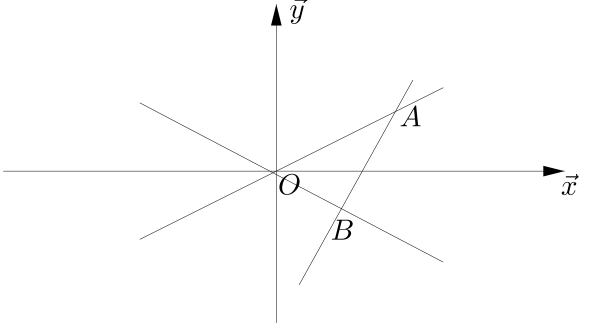


fig.20

a) La base $\overline{OB} = \sqrt{\frac{225}{169} + \frac{100}{169}} = \sqrt{\frac{325}{169}} = \frac{5}{13}\sqrt{13}$ e l'altezza h relativa a tale base è data dalla distanza del punto A dalla retta OB. Tale retta ha equazione $2x + 3y = 0$ e quindi dalla formula che dà la distanza di un punto da una retta si ha $h = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 2|}{\sqrt{13}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$; l'area S del triangolo è quindi $S = \frac{1}{2}\frac{5}{13}\sqrt{13}\frac{12}{\sqrt{13}} = \frac{30}{13}$.

b) L'altezza relativa alla base AB ha equazione $2x+3y = 0$; l'altezza relativa ad OB ha equazione $3x-2y-5 = 0$. Queste due altezze sono perpendicolari e si incontrano nel punto B. Quindi il nostro triangolo è rettangolo in $\widehat{B}$. Da ciò segue che il punto B è l'ortocentro del triangolo.

c) Le equazioni delle bisettrici degli angoli formati da due rette di cui si conoscono le equazioni si possono trovare come luogo dei punti equidistanti dalle rette. Nel nostro caso la retta AB ha equazione $3x - 2y - 5 = 0$; la retta OA ha equazione $2x - 3y = 0$ e la retta OB equazione $2x + 3y = 0$. Le equazioni delle bisettrici degli angoli formati da OA e AB sono date da

$$\frac{|2x - 3y|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x - 2y - 5|}{\sqrt{13}} \Longrightarrow 2x - 3y = \pm(3x - 2y - 5)$$

Si trovano due rette; noi dobbiamo scegliere quella di coefficiente angolare positivo; facili calcoli mostrano che tale retta è quella di equazione $y = x-1$.

Calcoliamo adesso le equazioni delle bisettrici dell'angolo formato da OA e da OB. Tali rette hanno equazioni $2x - 3y = 0$ e $2x + 3y = 0$, e quindi, avendo coefficienti angolari opposti, sono simmetriche rispetto all'asse delle $\vec{x}$. L'equazione della bisettrice cercata è $y = 0$. Il punto comune alle bisettrici trovate è il punto di coordinate $I = (1, 0)$. Troviamo infine le equazioni delle bisettrici dell'angolo formato dalle rette OB e AB. Come abbiamo già fatto il luogo dei punti equidistanti dalle due rette è dato da

$$\frac{|2x + 3y|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x - 2y - 5|}{\sqrt{13}} \Longrightarrow 2x + 3y = \pm(3x - 2y - 5)$$

La bisettrice da considerare è quella di coefficiente angolare negativo; cioè $y = -5x + 5$. Essa passa per il punto $I = (1, 0)$.

Capitolo 3

Geometria lineare nello spazio

3.1 Coordinate omogenee

Nello spazio ordinario S sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.U$, di origine O, associato alla terna antioraria di versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$; ciò significa che $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

Come abbiamo visto nel Cap. 1, ad ogni punto P dello spazio si associano le sue coordinate cartesiane reali (x, y, z). Queste sono dette le **coordinate non omogenee** del punto P. Analogamente a quanto detto per i punti del piano, anche per i punti dello spazio si introducono le **coordinate omogenee o proiettive** . Precisamente, il punto $P = (x, y, z)$ si può anche individuare mediante quaterne (x', y', z', t') di numeri reali, non tutti nulli, con $t' \neq 0$, definite a meno di un fattore di proporzionalità, legate alle coordinate non omogenee dalle relazioni

$$x = \frac{x'}{t'}, \qquad y = \frac{y'}{t'}, \qquad z = \frac{z'}{t'} \tag{3.1}$$

In analogia a quanto detto nel caso del piano, anche nello spazio si introducono i punti **impropri** e i punti **immaginari**. Lo spazio così ampliato verrà detto **lo spazio proiettivo complesso**, e verrà denotato con $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^3$. Tutti i punti impropri dello spazio sono caratterizzati dall'avere la quarta coordinata omogenea nulla, cioè $t' = 0$.

Ovviamente i punti impropri e immaginari sono di natura diversa rispetto a quelli propri e reali e vengono introdotti in modo da rendere la trattazione di alcuni argomenti elegante e coerente.

3.2 I piani dello spazio ordinario

I piani reali dello spazio $\mathbb{P}^3$ vengono studiati associando loro delle equazioni nel modo che ora descriveremo e che costituisce la naturale estensione di quanto abbiamo fatto nel capitolo precedente per le rette del piano.

Cominciamo con l'osservare che un piano reale π dello spazio è perfettamente determinato assegnando un suo punto P_0 ed un vettore reale non nullo $\mathbf{n} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ ad esso ortogonale. I punti $P \in \pi$ si possono allora caratterizzare come tutti e soli i punti tali che il vettore $[P_0, P]$ è perpendicolare al vettore $\mathbf{n}$, il che equivale a dire che $[P_0, P]\bullet\mathbf{n} = 0$. La precedente, passando alle componenti dei vettori, si può anche scrivere nella forma

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3.2}$$

La figura seguente aiuta a interpretare quanto detto.

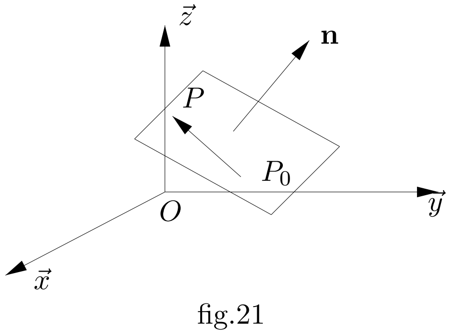


fig.21

Effettuando i prodotti e ponendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, la (3.2) si può scrivere nella forma

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3.3}$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Tale equazione è lineare nelle variabili x, y, z.

Se per scrivere l'equazione avessimo usato un altro vettore $\mathbf{n}'$, perpendicolare al piano, $\mathbf{n}' = \rho\,\mathbf{n}$, allora avremmo trovato una equazione equivalente alla precedente cioè l'equazione (3.2) con i coefficienti moltiplicati per ρ.

Viceversa, se $ax + by + cz + d = 0$ è una equazione lineare con coefficienti reali, tali che $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, allora essa rappresenta un ben determinato piano dello spazio.
Infatti detta (x_0, y_0, z_0) una sua soluzione, si ha $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Ricavando d dalla precedente e sostituendo nell'equazione data si ha $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$. Essa è l'equazione del piano passante per il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e perpendicolare al vettore $\mathbf{n} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$.

In conclusione possiamo dire che *c'è una corrispondenza biunivoca tra i piani reali dello spazio e le equazioni lineari* $ax + by + cz + d = 0$, *con* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, *purché si identifichino le equazioni equivalenti.*
È bene ricordare che due equazioni lineari sono equivalenti se e solo se hanno i coefficienti proporzionali.

Come è noto un piano reale π dello spazio è perfettamente determinato assegnando tre suoi qualunque punti non allineati P_0, P_1, P_2. Vedere la figura seguente

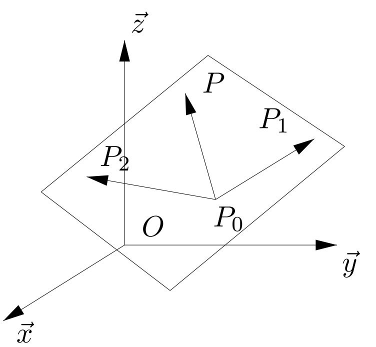


fig.22

Allora i punti P del piano π si possono caratterizzare come tutti e soli i punti tali che i vettori $[P_0, P]$, $[P_0, P_1]$, $[P_0, P_2]$ sono complanari; ciò equivale a dire che il loro prodotto misto è zero, cioè $[P_0, P]\bullet[P_0, P_1] \wedge [P_0, P_2] = 0$.

Per esprimere tale prodotto misto secondo le componenti lungo gli assi scriviamo la matrice che fornisce le componenti del prodotto vettoriale $\mathbf{v} = [P_0, P_1] \wedge [P_0, P_2]$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Dal fatto che i punti P_0, P_1, P_2 non sono allineati segue che i vettori $[P_0, P_1]$ e $[P_0, P_2]$ non sono paralleli e quindi il vettore $\mathbf{v}$ non è il vettore nullo. L'annullamento del prodotto misto comporta
$\mathbf{v}_x(x - x_0) + \mathbf{v}_y(y - y_0) + \mathbf{v}_z(z - z_0) = 0$, e questa è una equazione lineare in x, y, z.

Ricordando l'espressione del prodotto misto di tre vettori secondo le loro componenti, sotto forma di determinante, la precedente si può anche scrivere nella forma

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.5}$$

Si vede quindi che in ogni caso il piano ha equazione del tipo (3.3).

Osservazione 8 *Nell'equazione di un qualunque piano reale $ax + by + cz + d = 0$ i numeri (a, b, c) rappresentano le componenti di un vettore perpendicolare al piano.*

3.3 Le rette dello spazio ordinario

Studiamo adesso le rette dello spazio ordinario $\mathbb{P}^3$. Come vedremo esse si possono rappresentare in vari modi.

Cominciamo col dire che una retta reale r dello spazio è perfettamente determinata assegnando un suo punto proprio P_0 ed un vettore non nullo ad essa parallelo $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$, che si suole chiamare **vettore direttivo per** r. Allora i punti $P \in r$ si possono caratterizzare come tutti e soli i punti tali che il vettore $[P_0, P]$ è parallelo al vettore $\mathbf{v}$.

Quindi per r possiamo scrivere l'equazione vettoriale

$$[P_0, P] = t\mathbf{v} \tag{3.6}$$

Prendendo le componenti dei vettori di ambo i membri, si ottengono le equazioni parametriche della retta r

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{3.7}$$

Viceversa assegnando delle equazioni del tipo (3.7) con $(l, m, n) \neq (0, 0, 0)$ esiste una ed una sola retta dello spazio che ammette tali equazioni come equazioni parametriche, precisamente quella passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}$ di componenti (l, m, n).

Se dalle equazioni (3.7) si elimina il parametro t si ottengono due equazioni lineari nelle variabili x, y, z. Precisamente se l, m, n sono tutti non nulli si hanno le equazioni

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{3.8}$$

Se dei tre numeri l, m, n due sono nulli, per esempio $l = 0,\ m = 0$, dalle (3.7) l'eliminazione dà luogo alle due equazioni $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$. Se uno solo dei numeri è nullo, per esempio se $n = 0$, allora eliminando il parametro t da (3.7) si ottengono le due equazioni lineari

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} \\ z = z_0 \end{cases} \tag{3.9}$$

In definitiva, si vede che una retta scritta in forma parametrica è equivalente ad un sistema di due equazioni lineari nelle variabili x, y, z. Ciò si può esprimere dicendo che una retta r si può rappresentare come **intersezione di due piani**.

Viceversa, l'intersezione dei due piani

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

con (a, b, c) terna non proporzionale a (a', b', c'), rappresenta una ben determinata retta dello spazio. Se, per fissare le idee, è $ab' - a'b \neq 0$, allora da (3.10) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a}y - \dfrac{c}{a}z - \dfrac{d}{a} \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x - \dfrac{c'}{b'}z - \dfrac{d'}{b'} \end{cases} \tag{3.11}$$

Dalle precedenti (3.11), per sostituzione, si ottiene un sistema del tipo

$$\begin{cases} x = p + uz \\ y = q + vz \end{cases} \tag{3.12}$$

con p, q, u, v numeri opportunamente determinati. Le equazioni di (3.12) si possono scrivere

$$\begin{cases} x = p + uz \\ y = q + vz \\ z = z \end{cases}$$

dove z ha il ruolo di parametro. Le precedenti sono le equazioni parametriche della retta passante per $P_0 = (p, q, 0)$ parallela al vettore $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Notazione
Se la retta r è rappresentata come intersezione dei due piani π e π' si scrive che $r = \pi \cap \pi'$.

Un altro modo di determinare una retta reale r nello spazio è quello di assegnare due suoi punti distinti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. In tal caso il vettore $[P_0, P_1]$ ha il ruolo di vettore direttivo. Segue subito che l'equazione vettoriale della retta si può scrivere nella forma

$$[P_0, P] = t[P_0, P_1] \tag{3.13}$$

e le equazioni parametriche scalari assumono la forma

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)\, t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)\, t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)\, t \end{cases} \tag{3.14}$$

A questo punto si potrebbero ripetere argomentazioni analoghe a quelle usate nel caso precedente, ma noi le omettiamo, perché si avrebbero delle inutili ripetizioni. Lo studente potrà ricavare tutte le formule, nei vari casi che possono presentarsi. Per esempio, se il vettore $[P_0, P_1]$ non è parallelo a nessuno degli assi coordinati, eliminando il parametro t dalle (3.14), si ottengono **le equazioni della retta congiungente i punti P_0 e P_1**, nella forma

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{3.15}$$

3.3.1 Elementi impropri e immaginari in $\mathbb{P}^3$

Come abbiamo detto all'inizio del capitolo con $\mathbb{P}^3$ si denota lo spazio proiettivo complesso, che è l'insieme dei punti propri e impropri, reali e immaginari. Non ripetiamo nel dettaglio le varie definizioni perché in effetti tutto è analogo a quanto abbiamo detto nel capitolo precedente per i punti del piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2$.

Facciamo adesso alcune considerazioni che saranno utili nel seguito.

Se nell'equazione (3.3) sostituiamo le (3.1), l'equazione del piano diventa

$$a\Big(\frac{x'}{t'}\Big) + b\Big(\frac{y'}{t'}\Big) + c\Big(\frac{z'}{t'}\Big) + d = 0 \tag{3.16}$$

e moltiplicando ambo i membri per t' si ottiene

$$ax' + by' + cz' + dt' = 0 \tag{3.17}$$

che si dice l'equazione del piano in **forma omogenea**.

Ricordando che i punti impropri dello spazio sono caratterizzati dall'equazione $t' = 0$, possiamo dire che i piani dello spazio si rappresentano mediante equazioni del tipo (3.17); tali piani sono propri per $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ mentre per $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ si ottiene l'equazione $t' = 0$ che è detta **l'equazione del piano improprio**.

Consideriamo adesso in $\mathbb{P}^3$ un piano π proprio, di equazione omogenea $ax' + by' + cz' + dt' = 0$. Ricordando che tutti i punti impropri dello spazio sono rappresentati dall'equazione $t' = 0$, segue che i punti impropri del piano π si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' + cz' + dt' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' + cz' = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Tale luogo di punti è detto **la retta impropria del piano** π.

Consideriamo adesso due piani propri distinti π e π' di equazioni omogenee rispettivamente $ax' + by' + cz' + dt' = 0$ e $a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0$, tali che (a, b, c) non siano proporzionali ad (a', b', c'). Come abbiamo visto in (3.10) i due piani si secano in una retta r propria. Per trovare il punto improprio di tale retta basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' + cz' + dt' = 0 \\ a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' + cz' = 0 \\ a'x' + b'y' + c'z' = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Si osservi adesso la figura seguente

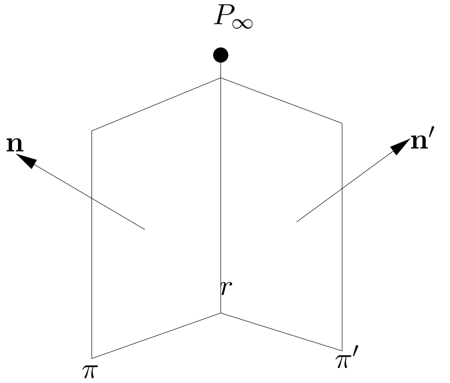


fig.23

Sia $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ un vettore non nullo parallelo alla retta r. Visto che i vettori $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ed $\mathbf{n}' = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}$ sono ortogonali a π e π' essi sono entrambi ortogonali ad $\mathbf{v}$. Per cui $\mathbf{n}\bullet\mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{n}'\bullet\mathbf{v} = 0$. Passando alle componenti si ottiene il sistema

$$\begin{cases} al + bm + cn = 0 \\ a'l + b'm + c'n = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Osservando i due sistemi (3.19) e (3.20) si può stabilire la seguente

Proposizione 10 *Le prime tre coordinate (omogenee) del punto improprio di una retta reale e propria sono parametri direttori della retta.*

Per quanto riguarda gli elementi immaginari di $\mathbb{P}^3$ spendiamo solo qualche riga, rinviando alle applicazioni per un approfondimento di tali argomenti.

Un piano è detto immaginario se l' equazione ad esso associata ha coefficienti dati da numeri complessi non reali ed è tale che non ci sono equazioni ad esso equivalenti a coefficienti tutti reali. Per esempio il piano di equazione $2ix - (1-i)y + z - it = 0$ è un piano immaginario. Mentre l'equazione $ix - iy = 0$ è l'equazione del piano reale $x - y = 0$.

Perché una retta data come intersezione di due piani sia una retta immaginaria deve accadere che essa non si possa rappresentare come intersezione di due piani a coefficienti reali.

Per esempio una retta ottenuta come intersezione di un piano immaginario e uno reale è una retta immaginaria.

La retta intersezione di due piani a coefficienti complessi coniugati è una retta reale. La dimostrazione di questo è analoga a quella che abbiamo fatto per provare che due rette immaginarie e coniugate si intersecano in un punto reale, e quindi la omettiamo.

Punti, rette e piani immaginari sono enti che pensiamo nell'ambiente $\mathbb{P}^3$.

3.4 Ortogonalità e parallelismo

In analogia a quanto abbiamo detto per le rette del piano, anche per i piani e le rette dello spazio è facile stabilire le condizioni di ortogonalità e parallelismo, nonché gli angoli che questi formano tra loro.

Cominciamo col considerare due piani propri e reali π e π' distinti di equazioni non omogenee rispettivamente $ax+by+cz+d=0 \quad$ e $\quad a'x+b'y+c'z+d'=0$.

Diciamo, come al solito, $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ed $\mathbf{n}' = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}$ dei vettori perpendicolari a π e π'. È immediato affermare che

$$\pi \parallel \pi' \Longleftrightarrow \mathbf{n} \parallel \mathbf{n}' \Longleftrightarrow \mathbf{n} = \rho\,\mathbf{n}' \quad \text{per qualche scalare } \rho \neq 0 \tag{3.21}$$

Dalla proporzionalità dei coefficienti (a, b, c) e (a', b', c') segue subito che due piani paralleli hanno la stessa retta impropria. La retta impropria di un piano viene detta la sua **giacitura**. Quindi due piani sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

Da quanto precede si può affermare che

Proposizione 11 *In $\mathbb{P}^3$ due piani distinti hanno sempre una retta in comune. Tale retta è propria se i due piani sono propri e non paralleli, cioè incidenti. La retta comune è impropria se uno dei due piani è improprio oppure i due piani sono propri e paralleli.*

Stabiliamo adesso la **condizione di ortogonalità** di due piani propri e reali π e π'.

$$\pi \perp \pi' \Longleftrightarrow \mathbf{n} \perp \mathbf{n}' \Longleftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0 \tag{3.22}$$

Infine due piani propri e reali π e π' incidenti formano quattro angoli, a due a due uguali, α e β. I coseni di tali angoli sono determinati, a meno del segno, dal coseno dell'angolo formato dalle normali $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ cioè da

$\cos \widehat{\mathbf{nn}'} = \dfrac{\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}'}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{n}'|}.$

Siano date due rette reali e distinte r ed r'. Qualunque sia il modo di rappresentarle, sempre si possono determinare due vettori direttivi $\mathbf{v} = l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}' = l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}$ ad esse paralleli. Quindi è immediato affermare che

$$r \parallel r' \Longleftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{v}' \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \rho\, \mathbf{v}' \text{ per qualche scalare } \rho \neq 0 \tag{3.23}$$

Per quanto provato nella Prop.10 si può dedurre che **due rette parallele hanno lo stesso punto improprio**.

Per quanto riguarda la **perpendicolarità fra rette** reali possiamo affermare che

$$r \perp r' \Longleftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{v}' \Longleftrightarrow ll' + mm' + nn' = 0 \tag{3.24}$$

Ed ancora i coseni degli angoli formati dalle due rette sono determinati, a meno del segno, dal coseno dell'angolo dei due vettori direttivi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$.

Siano dati una retta propria r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

e un piano proprio π di equazione non omogenea $ax + by + cz + d = 0$. Per trovare l'intersezione fra retta e piano dobbiamo risolvere il sistema formato dalle loro equazioni; la risolvente del sistema è $(al + bm + cn)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Essa ha una e una sola soluzione se e solo se $al + bm + cn \neq 0$. In tal caso la retta r e il piano π hanno un punto proprio a comune e si dicono **incidenti**. Se invece $al + bm + cn = 0$ la risolvente o è una identità oppure è impossibile. Nel primo caso la retta r giace su π, nel secondo caso la retta non incontra il piano in nessun punto proprio. In entrambi i casi diremo che **la retta r è parallela al piano π**.

D'altra parte la condizione $al + bm + cn = 0$ esprime la ortogonalità fra il vettore $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ e il vettore direttivo $\mathbf{v}$, condizione che è equivalente al parallelismo fra r e π.

È interessante osservare che la condizione $al + bm + cn = 0$ si può anche interpretare come la condizione di appartenenza del punto improprio della retta r, che ha coordinate omogenee $(l, m, n, 0)$, alla retta impropria del piano π, che è data da $\begin{cases} ax' + by' + cz' + dt' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$.

Se invece la retta r è perpendicolare al piano, allora i vettori $\mathbf{n}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli e quindi $\mathbf{n} = \rho\, \mathbf{v}$, ovvero (a, b, c) è proporzionale a (l, m, n).

3.5 Angoli fra rette e piani

Ricordiamo cosa debba intendersi per angoli formati da una retta reale r e un piano reale π, quando $r \not\perp \pi$. È bene riferirsi alla seguente figura

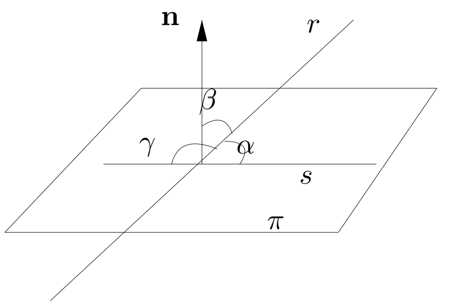


fig.24

Sia s la proiezione ortogonale di r sul piano π e β l'angolo formato dalla normale al piano con un vettore direttivo $\mathbf{v}$ di r. Le rette r ed s formano due angoli α e γ, l'uno complementare di β e l'altro che differisce da β di un angolo $\dfrac{\pi}{2}$.

Allora i seni degli angoli α e γ sono uguali a $\pm\cos\beta = \pm\dfrac{\mathbf{n}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{v}|}$.

Rette complanari e rette sghembe

Consideriamo due rette distinte r ed s ciascuna data come intersezione di due piani, precisamente

$$r)\ \begin{cases} ax' + by' + cz' + dt' = 0 \\ a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0 \end{cases} \qquad s)\ \begin{cases} a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1t' = 0 \\ a_1'x' + b_1'y' + c_1'z' + d_1't' = 0 \end{cases}$$

Per trovare l'intersezione delle due rette si deve risolvere il sistema formato dalle loro equazioni

$$\begin{cases} ax' + by' + cz' + dt' = 0 \\ a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0 \\ a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1t' = 0 \\ a_1'x' + b_1'y' + c_1'z' + d_1't' = 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

Il sistema (3.25) è un sistema omogeneo di 4 equazioni in 4 incognite; esso come tutti i sistemi omogenei ammette sempre la soluzione banale $(0, 0, 0, 0)$,

ma tale quaterna non definisce alcun punto in $\mathbb{P}^3$.
Dalla teoria dei sistemi lineari si ha che perché esso ammetta soluzioni non banali deve accadere che il determinante della matrice dei coefficienti sia uguale a zero.

Definizione 5 *In $\mathbb{P}^3$ due rette r ed s si dicono* **sghembe** *se non hanno punti in comune. Se si incontrano in un punto proprio o improprio, appartengono ad uno stesso piano e si dicono* **complanari**.

In definitiva, se due rette sono sghembe non esiste alcun piano che le contiene entrambe.
Per concludere, la condizione di complanarità delle rette r ed s è

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.26}$$

3.6 Fasci di piani

Dati due piani distinti π e π' di equazioni omogenee rispettivamente $ax' + by' + cz' + dt' = 0$ e $a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0$, si definisce **fascio di piani** Φ determinato da π e π' la totalità dei piani la cui equazione è una combinazione lineare delle loro equazioni e cioè

$$\lambda(ax' + by' + cz' + dt') + \mu(a'x' + b'y' + c'z' + d't') = 0 \tag{3.27}$$

al variare di λ e μ, purché λ e μ non siano entrambi nulli.
Come al solito per individuare un piano del fascio Φ si deve determinare il rapporto $\dfrac{\lambda}{\mu}$ oppure $\dfrac{\mu}{\lambda}$.
Abbiamo già osservato che due piani distinti in $\mathbb{P}^3$ si intersecano sempre in una retta. La retta $r = \pi \cap \pi'$ è detta **asse del fascio**.
Si prova subito la seguente

Proposizione 12 *I piani del fascio determinato da π e da π' sono tutti e soli i piani passanti per l'asse del fascio $r = \pi \cap \pi'$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ è un qualunque punto della retta $r = \pi \cap \pi'$ allora ogni piano del fascio passa per P_0, in quanto la condizione

di passaggio è verificata per ogni coppia λ e μ.
Viceversa sia $\overline{\pi}$ un piano contenente la retta r. Proviamo che esso è un piano del fascio Φ. Diciamo $\overline{Q} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ un punto del piano $\overline{\pi}$ non appartenente alla retta r. Sia ora $\pi^\star$ il piano del fascio passante per $\overline{Q}$; esso è perfettamente determinato perché la condizione di appartenenza di $\overline{Q}$ al fascio Φ dà luogo alla equazione $\lambda(ax_1 + by_1 + cz_1 + dt_1) + \mu(a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d't_1) = 0$, che non è identicamente nulla, e quindi permette di determinare univocamente il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ oppure $\frac{\mu}{\lambda}$. Si conclude che i due piani $\overline{\pi}$ e $\pi^\star$ coincidono, perché hanno la retta r a comune e passano per lo stesso punto $\overline{Q}$, e quindi $\overline{\pi}$ è un piano del fascio. □

Corollario 5 *Se i piani π e π' utilizzati per formare un fascio Φ si secano in una retta propria r allora i piani del fascio sono tutti e soli quelli passanti per r.*
Se i piani π e π' sono paralleli allora i piani di Φ sono tutti e soli i piani paralleli ad entrambi.

Da quanto detto segue subito che un fascio di piani è individuato da due suoi qualunque piani distinti.
Se nell'equazione (3.27) si suppone $\lambda \neq 0$, dividendo ambo i membri per λ e ponendo $h = \frac{\mu}{\lambda}$, l'equazione si può scrivere nella forma non omogenea

$$ax' + by' + cz' + dt' + h(a'x' + b'y' + c'z' + d't') = 0 \tag{3.28}$$

Tale equazione rappresenta tutti i piani di (3.27) escluso quello di equazione $a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0$, che si ottiene per $\lambda = 0$.

3.7 Distanze

Se nello spazio sono dati due punti propri e reali $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, allora la distanza dei due punti $\overline{P_1P_2}$ è data dal modulo del vettore $[P_1, P_2]$, quindi

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{3.29}$$

Distanza di un punto da un piano

Dato un piano proprio e reale π di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, la distanza $d(P_0, \pi)$ del punto dal piano è data dalla formula

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.30}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ è un punto che soddisfa, con le sue coordinate, l'equazione del piano, si ha $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ da cui $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$ per cui l'equazione del piano può scriversi nella forma $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$.

Si osservi la figura seguente

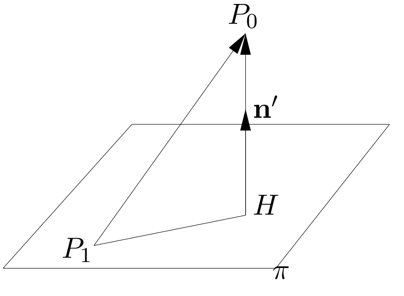


fig.25

È immediato osservare che $d(P_0, \pi) = \overline{P_0H}$ è la proiezione, come segmento non orientato, del vettore $[P_1, P_0]$ sul versore $\mathbf{n}'$ ortogonale a π. Ricordando che i coefficienti del piano a, b, c sono componenti di un vettore ortogonale a π, si ha che $\mathbf{n}' = \dfrac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, per cui

$$d(P_0, \pi) = \left| [P_1, P_0] \bullet \frac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

e tenendo conto delle posizioni fatte si deduce subito la formula (3.30). $\square$

Distanza di un punto da una retta

Per calcolare la distanza di un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ da una retta r, si deve trovare la proiezione ortogonale H di P_0 su r, e poi calcolare la distanza $\overline{P_0H}$.

Se della retta r si conoscono le componenti (l, m, n) di un vettore direttivo $\mathbf{v}$, e queste si possono calcolare in ogni caso, allora si può ragionare come segue. Si osservi la figura

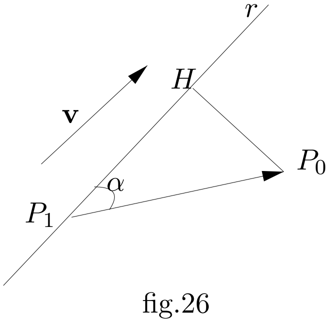


fig.26

La distanza $\overline{P_0H}$ si può ottenere dalla formula

$$\overline{P_0H} = \left| [P_1, P_0] \wedge \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right| \tag{3.31}$$

Ciò segue immediatamente calcolando il modulo del prodotto vettoriale indicato; esso è uguale $\overline{P_1P_0} \cdot 1 \cdot \sin\alpha$; tenendo conto di una nota proprietà dei triangoli rettangoli si ha la tesi. $\square$

3.8 Esempi e applicazioni

Risolviamo adesso alcuni semplici esercizi che costituiscono degli esempi che devono essere assimilati dagli allievi, onde creare delle basi che consentano loro di affrontare problemi di difficoltà via via crescente.

In tutti gli esempi che seguono si pensi che nello spazio sia fissato, una volta per tutte, un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$, a meno che non sia detto esplicitamente il contrario.

Ai fini delle applicazioni è molto importante il seguente esempio

Esempio 11 *Date due rette sghembe r ed s di equazioni rispettivamente* $r)\ \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$ $\qquad s)\ \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

a) detto $P = (1, -2, 1)$ un punto con $P \notin r \cap s$, determinare le equazioni della retta t passante per P e incidente r ed s (equivalentemente complanare ad r e ad s)

b) determinare le equazioni della retta u incidente ortogonalmente entrambe le rette r ed s.

c) detti A e B i punti in cui u incontra r ed s, calcolare la distanza $\overline{AB}$. Questa distanza è detta la **minima distanza delle due rette sghembe**.

Soluzione. a) La retta t cercata si ottiene come intersezione dei due piani π e π', passanti per P, l'uno contenente r e l'altro contenente s. Basta quindi scrivere il fascio di piani avente per asse r che ha equazione $\lambda(x - y + z) + \mu(2x + z - 1) = 0$ ed imporre il passaggio per P; si ottiene $4\lambda + 2\mu = 0$; quindi $\dfrac{\lambda}{\mu} = -\dfrac{1}{2}$ e l'equazione del piano π è $3x + y + z - 2 = 0$. Analogamente consideriamo il fascio di piani avente per asse s; l'equazione del fascio è $\lambda'(x - 2z + 1) + \mu'(y + z - 1) = 0$; imponendo il passaggio per P si ottiene l'equazione del piano π' e cioè $x - 2z + 1 = 0$. In definitiva la retta t è la retta intersezione di questi due piani.
b) Questo esercizio si può considerare come un caso particolare del precedente. Nel senso che la retta u cercata si può pensare come la retta incidente r ed s e passante per il punto improprio P_∞ che individua la direzione ortogonale ad entrambe le rette. Qui è bene ricordare quanto detto nella Prop.10 di pag.58. Per questo dette $(l, m, n,)$ le prime tre coordinate omogenee del punto P_∞, tenendo conto che il punto improprio di r ha coor-

dinate $(-1,1,2,0)$ e quello di s coordinate $(2,-1,1,0)$, per la ortogonalità si ha $\begin{cases} l-m-2n=0 \\ 2l-m+n=0 \end{cases}$. Quindi il punto improprio che dà la direzione di u ha coordinate $(3,5,-1,0)$. Nel fascio di piani avente per asse la retta r, scritto in coordinate omogenee perché dobbiamo imporre il passaggio per un punto improprio, cerchiamo il piano passante per $(3,5,-1,0)$. Si ottiene $11x-5y+8z-3=0$. Analogamente nel fascio avente per asse s, scritto anch'esso in coordinate omogenee, cerchiamo il piano passante per il punto improprio $(3,5,-1,0)$. Si ottiene $4x-5y-13z+9=0$. La retta u cercata è quella ottenuta come intersezione dei due piani trovati.
c) La minima distanza delle due rette sghembe si può calcolare come distanza di un qualunque punto della retta s dal piano passante per r e parallelo ad s.
Cominciamo a scrivere il fascio di piani avente asse r. La sua equazione è data da $\lambda(x-y+z)+\mu(2x+z-1)=0$; questa si può anche scrivere $(\lambda+2\mu)x-\lambda y+(\lambda+\mu)z-\mu=0$. I numeri $(2,-1,1)$ sono parametri direttori della retta s. Quindi perché il generico piano del fascio sia parallelo ad s dev'essere $2\lambda+4\mu+\lambda+\lambda+\mu=0$; da cui $\dfrac{\lambda}{\mu}=-\dfrac{5}{4}$. Il piano che si ottiene ha equazione $3x+5y-z-4=0$. Un punto di s è $P_0=(-1,1,0)$ e la sua distanza dal piano trovato è $\dfrac{|-3+5-4|}{\sqrt{9+25+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{35}}$ $\square$

Dall'esempio predente si trae la **proprietà**: *Date due rette sghembe r ed s esiste una ed una sola retta incidente entrambe ortogonalmente.*

Per le applicazioni si rivela molto utile la seguente

Osservazione Date due rette sghembe r ed s nello spazio. Esiste un sistema di riferimento "ottimale" rispetto al quale le equazioni delle due rette si possono esprimere in modo semplice.
Tale sistema di riferimento si sceglie nel modo seguente:
si dica asse $\vec{z}$ la retta u che si appoggia ortogonalmente ad entrambe le rette date e la si orienti in modo arbitrario.
Tale retta incontra r in un punto A ed s in B. Si fissi l'origine O nel punto medio del segmento AB, e l'unità di misura u uguale ad OA.
Detto π il piano passante per O e perpendicolare ad u. Si dicano r' ed s' le proiezioni ortogonali di r ed s su π.
Si dicano asse $\vec{x}$ e asse $\vec{y}$ le bisettrici degli angoli formati dalle rette r'ed s'.
Si orientino gli assi in modo che $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ costituisca una terna antioraria. Fatte

queste premesse è sempre possibile orientare gli assi in modo che le due rette date, nel riferimento così scelto, abbiano equazioni rispettivamente

$$r\ \begin{cases} z = 1 \\ y = mx \end{cases} \qquad s\ \begin{cases} z = -1 \\ y = -mx \end{cases}$$

Osservare la figura seguente

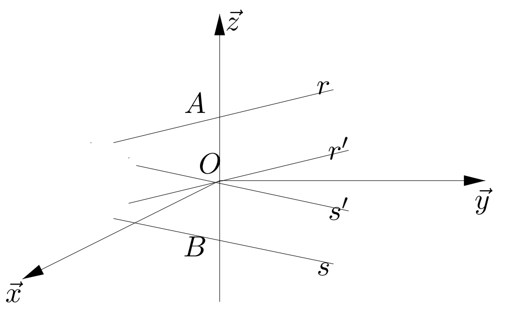


fig.27

Applichiamo il precedente risultato al seguente

Esempio 12 *Date due rette sghembe r ed s, che incontrano la retta u, perpendicolare ed incidente entrambe, nei punti A e B. Trovare il luogo dei punti P del piano π, perpendicolare ad u nel punto medio di AB, tali che $d(P, r) = d(P, s)$.*

Soluzione. Fissiamo un sistema di riferimento nello spazio nel modo detto nella precedente osservazione. Quindi le due rette r ed s hanno equazioni rispettivamente

$$r\ \begin{cases} z = 1 \\ y = mx \end{cases} \qquad s\ \begin{cases} z = -1 \\ y = -mx \end{cases}$$

Un vettore direttivo $\mathbf{v} \parallel r$ ha componenti $(1, m, 0)$ ed un vettore direttivo $\mathbf{w} \parallel s$ ha componenti $(1, -m, 0)$.

La distanza $d(P, r)$ si ottiene calcolando il modulo del prodotto vettoriale $\left|[A, P] \wedge \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|$. Detto $P = (x, y, 0)$ un punto del piano $z = 0$, basta calcolare il modulo del vettore che si ottiene sviluppando il determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & -1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}} & \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}} & 0 \end{vmatrix}.$$

Semplici calcoli provano che $d(P,r)^2 = \dfrac{m^2+1+(mx-y)^2}{1+m^2}$.

Analogamente si ha $d(P,s)^2 = \dfrac{m^2+1+(mx+y)^2}{1+m^2}$.

Uguagliando le due distanze si ha che i punti $P=(x,y,0)$ del nostro luogo soddisfano l'equazione $xy=0$; da ciò si deduce che i punti cercati sono quelli che soddisfano $z=0,\ y=0$ e $z=0,\ x=0$. Queste sono le equazioni degli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Esempio 13 *Sono assegnati la retta* $r)\ :\ \begin{cases} x+y+2=0 \\ y+z-1=0, \end{cases}$ *il piano* $\pi)\ :\ x-2y+z+1=0$ *e il punto* $P=(1,-1,1)$. *Scrivere le equazioni:*

a) del piano π' *che passa per* P *ed è ortogonale ad* r*;*

b) del piano π'' *che passa per* P *ed è parallelo a* π*;*

c) della generica retta t *che passa per* P *ed è perpendicolare ad* r*;*

d) della retta s *che passa per* P *ed è perpendicolare a* π*.*

Soluzione. Scritte le equazioni della retta r nella forma $\begin{cases} x=-y-2 \\ y=y \\ z=-y+1 \end{cases}$, i numeri $(1,-1,1)$ si possono prendere come parametri direttori di r; allora l'equazione del piano π' è $(x-1)-(y+1)+(z-1)=0$, cioè $x-y+z-3=0$.

b) il piano π'' ha equazione $(x-1)-2(y+1)+(z-1)=0$, cioè $x-2y+z-4=0$.

c) la generica retta passante per P si può scrivere nella forma $\begin{cases} x-1=m(z-1) \\ y+1=n(z-1) \end{cases}$; imponendo la perpendicolarità con r si ha la condizione $m-n+1=0$. Quindi le equazioni della generica retta t sono $\begin{cases} x=1+m(z-1) \\ y=-1+(m+1)(z-1) \end{cases}$.

d) le equazioni della retta s si possono scrivere in forma parametrica, tenendo conto che i coefficienti del piano π sono parametri direttori della retta s. Segue quindi $s\ \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=1+t \end{cases}$.

Esempio 14 *Dopo aver verificato che le tre rette*

$$r\ \begin{cases} x+y=0 \\ z+1=0 \end{cases} \qquad s\ \begin{cases} y-z=0 \\ x-1=0 \end{cases} \qquad t\ \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

sono complanari, trovare l'equazione del piano che le contiene e l'area del triangolo da queste limitato.

Soluzione. In generale, quando due rette r ed s sono complanari, per trovare il piano che le contiene bisogna cercare fra i piani del fascio di asse r quel piano passante per un qualunque punto della retta s.

Ma nel nostro caso, da un esame delle equazioni di r, s e t si vede immediatamente che esse stanno tutte sul piano di equazione $x + y - z - 1 = 0$. Per esempio dalle equazioni di r si vede subito che l'equazione del piano si ottiene sottraendo dalla seconda equazione la prima; dalle equazioni di s si vede che l'equazione del piano si ottiene sommando le due equazioni. In definitiva si può scrivere

$$r \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \qquad t \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

I punti comuni alle tre rette si trovano risolvendo i sistemi formati dalle equazioni delle rette. Si ottiene subito che $r \cap s = A = (1, -1, -1)$; $r \cap t = B = (0, 0, -1)$; $s \cap t = C = (1, -2, -2)$. Per trovare l'area del triangolo ABC basta moltiplicare metà della misura della base $\overline{AB}$ per la misura dell'altezza relativa a questa base. Ed allora $\overline{AB} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. La distanza d di C dalla retta AB si ottiene calcolando il modulo del vettore $[C, B] \wedge \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$.

Quindi $d = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

L'aerea del triangolo è $\overline{AB} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot d = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Esempio 15 *Dato il punto* $P = (0, 0, 1)$*; trovare le equazioni delle rette passanti per* P *che formano con l'asse* $\vec{z}$ *un angolo di* $\dfrac{\pi}{6}$*. In particolare determinare fra queste quelle appartenenti al piano* $y = 0$*.*

Soluzione. Le equazioni della generica retta passante per P sono

$(\star) \quad \begin{cases} x = m(z - 1) \\ y = n(z - 1) \end{cases}$. I numeri $(m, n, 1)$ sono parametri direttori della generica retta considerata. Dobbiamo imporre che il coseno dell'angolo che questa retta forma con l'asse $\vec{z}$ sia $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Si ha quindi la condizione $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{k}}{|\mathbf{v}|}$, cioè $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}$, quindi $3m^2 + 3n^2 - 1 = 0$. Le rette richieste sono

quelle del sistema ($\star$) soggette a quest'ultima condizione.
Per determinare quelle del piano $y = 0$ basta porre nella condizione $n = 0$. Si ottengono le due rette

$$r)\ \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(z-1) \end{cases} \qquad s)\ \begin{cases} y = 0 \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(z-1) \end{cases}$$

Esempio 16 *Sono assegnati il piano* $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$ *e la retta* $r)\ \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$ *Detto* $P = (a, b, c)$ *il generico punto dello spazio, determinare:*
a) il punto P_1 *simmetrico di* P *rispetto ad* π*;*
b) il punto P_2 *simmetrico di* P *rispetto ad* r*;*
c) Il luogo $\mathcal{X}$ *dei punti* P *tali che* $P_1 = P_2$*.*

Soluzione. a) Per trovare il punto P_1 simmetrico di P, rispetto al piano π, bisogna trovare il punto H comune a π e alla retta passante per P e perpendicolare a π. Il punto P_1 è il punto tale che H sia il punto medio del segmento PP_1. Sviluppiamo i calcoli su quanto detto; le equazioni della retta passante per P e perpendicolare a π sono $\begin{cases} x = a + t \\ y = b - 2t \\ z = c + t \end{cases}$. Facendo sistema con l'equazione del piano π si ha $t = \dfrac{-a + 2b - c + 1}{6}$. Quindi il punto H ha coordinate $H = \left(\dfrac{5a + 2b - c + 1}{6}, \dfrac{a + b + c - 1}{3}, \dfrac{-a + 2b + 5c + 1}{6}\right)$. Ne segue che il punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ha le sue coordinate soddisfacenti le condizioni

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + a}{2} = x_h \\ \dfrac{y_1 + b}{2} = y_h \\ \dfrac{z_1 + c}{2} = z_h \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2a + 2b - c + 1}{3} \\ y_1 = \dfrac{2a - b + 2c - 2}{3} \\ z_1 = \dfrac{-a + 2b + 2c + 1}{3} \end{cases}$$

b) Per trovare il simmetrico di P rispetto alla retta r si deve trovare il punto K di intersezione con r del piano passante per P, perpendicolare ad r; per cui il punto P_2 è il punto tale che K sia il punto medio del segmento PP_2. Sviluppiamo i calcoli. La retta r ha parametri direttori $(1, 1, 1)$; quindi il piano per P perpendicolare ad r ha equazione $x - a + y - b + z - c = 0$. Dal sistema con le equazioni della r si ottiene il punto comune $K = \left(\dfrac{a+b+c-1}{3}, \dfrac{a+b+c-1}{3}, \dfrac{a+b+c+2}{3}\right)$. Quindi il punto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ è il punto le cui coordinate soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{a+x_2}{2} = x_k \\ \dfrac{b+y_2}{2} = y_k \\ \dfrac{c+z_2}{2} = z_k \end{cases} \quad \text{da cui si deduce} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{-a+2b+2c-2}{3} \\ y_2 = \dfrac{2a-b+2c-2}{3} \\ z_2 = \dfrac{2a+2b-c+4}{3} \end{cases}$$

c) Per rispondere a questo quesito si devono eguagliare le coordinate dei punti P_1 e P_2. Si ottiene

$$\begin{cases} 2a+2b-c+1 = -a+2b+2c-2 \\ 2a-b+2c-2 = 2a-b+2c-2 \\ -a+2b+2c+1 = 2a+2b-c+4 \end{cases}$$

La prima e la terza danno $a-c+1=0$; la seconda è l'identità. La conclusione è che il luogo $\mathcal{X}$ dei punti tali che i simmetrici P_1 e P_2 sono uguali è un piano la cui equazione è $x-z+1=0$.

Capitolo 4

Le Coniche

4.1 Generalità

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}.u$. Dopo avere studiato le rette, che "corrispondono" alle equazioni di primo grado nelle variabili x e y, vogliamo adesso studiare le coniche, che "corrispondono" alle equazioni di secondo grado in x e y.

In generale si pone la seguente

Definizione 6 *Una* conica *è il luogo dei punti propri o impropri, reali o immaginari che con le loro coordinate omogenee (x', y', t') soddisfano una equazione di secondo grado omogenea nelle variabili x', y', t' del tipo*

$$f(x', y', t') \equiv a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x't' + 2a_{23}y't' + a_{33}t'^2 = 0 \quad (4.1)$$

Osservazione 9 *Se la forma quadratica $f(x', y', t')$ è il quadrato di una forma lineare $ax' + by' + ct'$, allora la conica è data dai punti della retta $ax' + by' + ct' = 0$ ciascuno contato due volte.*

Se della conica considerata interessano soltanto i punti propri allora ci si può riferire all'equazione non omogenea che si ottiene dalla (4.1) ponendo $x' = x, y' = y, t' = 1$ e cioè l'equazione

$$f(x, y, 1) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (4.2)$$

L'equazione (4.2) si suole talvolta scrivere nella forma

$$f(x,y,1) \equiv \phi_2(x,y) + \phi_1(x,y) + \phi_0 = 0 \tag{4.3}$$

dove $\phi_2(x,y)$ indica il complesso dei termini di secondo grado nelle variabili x e y, $\phi_1(x,y)$ il complesso dei termini di primo grado e ϕ_0 il termine noto. A seconda del tipo di problema che si deve affrontare ci si riferirà all'equazione della conica nella forma (4.1), (4.2), (4.3).

Ad ogni conica si associa una matrice B simmetrica, detta **la matrice della conica**, data da

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Gli elementi di B si ottengono dall'equazione (4.1) dividendo per 2 i coefficienti dei termini misti e riscrivendo sulla diagonale principale i coefficienti di x'^2, y'^2 e t'^2. In altri termini B è la matrice associata alla forma quadratica $f(x',y',t')$.

Per gli sviluppi successivi consideriamo pure le seguenti entità:

1. **il determinante di** B;
2. **il rango di** B;
3. **la sottomatrice** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, che è la matrice associata alla forma quadratica $\phi_2(x,y)$;
4. **il determinante** di A, $det(A)$, e la sua traccia $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$.

Ricordando quanto detto a proposito del prodotto fra matrici, è talvolta utile considerare le equazioni (4.1) e (4.2) in **forma matriciale**.
Precisamente se:

$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle variabili nel caso (4.1) oppure $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ nel caso (4.2), le equazioni di una conica si possono scrivere in forma compatta:

$$f(x',y',t') \equiv {}^t\underline{x}' B \, \underline{x}' = 0 \tag{4.5}$$

oppure

$$f(x, y, 1) \equiv {}^t\underline{x}B\ \underline{x} = 0 \qquad (4.6)$$

La forma a cui è opportuno riferirsi, compatta o meno, dipenderà essenzialmente dal contesto in cui si opera.

Definizione 7 *Se il primo membro dell'equazione (4.1) o (4.2) si spezza nel prodotto di due fattori lineari, distinti o no, la conica si dice* **riducibile** *o* **spezzata** *ed i suoi punti sono quelli delle due rette in cui si spezza.*
Se una conica non è riducibile si dice **irriducibile**.

4.2 Riduzione di una conica a forma canonica

Per studiare una conica si adotta un procedimento di **riduzione a forma canonica**, che consiste nell'individuare una opportuna rototraslazione che cambia il sistema ortogonale antiorario dato $O(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ in un altro sistema $O'(\mathrm{I},\mathrm{J})$, anch'esso ortogonale antiorario, rispetto a cui l'equazione (4.2) della conica assuma una delle seguenti due forme:

$$I) \quad \alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma \qquad \text{oppure} \quad II) \quad \beta Y^2 = 2\gamma X$$

che si potranno rendere omogenee quando questo occorra.

Cominciamo col considerare l'equazione (4.2) $f(x, y, 1) = 0$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. In essa $\phi_2(x, y)$ è la forma quadratica associata alla matrice simmetrica reale A. In base al Teorema spettrale, A può essere diagonalizzata mediante una matrice ortogonale $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{2,2}$ di tipo speciale, cioè tale che $det(P) = 1$, per cui

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = A'$$

dove α e β sono gli autovalori di A, che come sappiamo sono reali. Come è noto la matrice P è la matrice di una rotazione antioraria del dato sistema di riferimento.

Utilizzando la matrice P, dianzi determinata, di fatto si opera un cambiamento di coordinate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} X^\star \\ Y^\star \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \quad P' = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che si può anche scrivere in termini vettoriali $\underline{x} = P'\underline{X}^\star$, dove $\underline{X}^\star = \begin{pmatrix} X^\star \\ Y^\star \\ 1 \end{pmatrix}$.

Allora l'equazione (4.2) ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$, tenendo conto che ${}^t\underline{x} = ({}^t\underline{X}^\star)({}^tP')$, diventa ${}^t\underline{X}^\star({}^tP'BP')\underline{X}^\star = 0$.
In termini più espliciti si ha:

$$\alpha X^{\star 2} + \beta Y^{\star 2} + aX^\star + bY^\star + c = 0 \tag{4.7}$$

Per effetto della rotazione che porta il sistema $O\vec{x}\vec{y}$ in $O\vec{X}^\star\vec{Y}^\star$ è stato possibile "eliminare" il termine misto xy.

A questo punto si procede distinguendo vari casi:

1. Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ la (4.7) diventa: $aX^\star + bY^\star + c = 0$, che può essere scritta: $(aX^\star + bY^\star + cT^\star)T^\star = 0$. Se $(a, b) \neq (0, 0)$, mediante una opportuna rototraslazione, la retta $aX^\star + bY^\star + cT^\star = 0$ può essere assunta come l'asse $\vec{Y}$ di un nuovo sistema di riferimento; in tal caso l'equazione della conica diventa $XT = 0$ che è del tipo II).
   Se $(a, b) = (0, 0)$ la (4.7) diventa $cT^{\star 2} = 0$ che è del tipo I).

2. Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ la (4.7) diventa: $\beta Y^{\star 2} + aX^\star + bY^\star + c = 0$ che si può scrivere $\beta\left(Y^{\star 2} + \dfrac{b}{\beta}Y^\star\right) + aX^\star + c = 0$; completando il quadrato si ha:

   $$\beta\left(Y^\star + \frac{b}{2\beta}\right)^2 + aX^\star + c - \frac{b^2}{4\beta} = 0$$

   Se $a = 0$, con la traslazione $X = X^\star$, $\quad Y = Y^\star + \dfrac{b}{2\beta}$, l'equazione diventa: $\beta Y^2 = \dfrac{b^2}{4\beta} - c$, che è del tipo I).
   Se $a \neq 0$ l'equazione si può scrivere:

   $$\beta\left(Y^\star + \frac{b}{2\beta}\right)^2 + a\left(X^\star + \frac{4\beta c - b^2}{4a\beta}\right) = 0$$

che con la traslazione: $X = X^\star + \dfrac{4\beta c - b^2}{4a\beta}, \quad Y = Y^\star + \dfrac{b}{2\beta}$ diventa: $\beta Y^2 + aX = 0$ che è del tipo II).

3. Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ completando i quadrati si ha:

$$\alpha\left(X^\star + \frac{a}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(Y^\star + \frac{b}{2\beta}\right)^2 + c - \frac{a^2}{4\alpha} - \frac{b^2}{4\beta} = 0;$$

con la traslazione $X = X^\star + \dfrac{a}{2\alpha}, \quad Y = Y^\star + \dfrac{b}{2\beta}$, l'equazione diventa

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \frac{a^2}{4\alpha} + \frac{b^2}{4\beta} - c$$

che è del tipo I).

Osservazione 10 *Si noti che dopo fatta la rotazione che diagonalizza la sottomatrice A gli autovalori α e β, coefficienti di $X^{\star 2}$ e $Y^{\star 2}$, non vengono influenzati dalla eventuale successiva traslazione.*

In definitiva detto $O' = (a, b)$ il centro della traslazione, la matrice del cambio di base è:

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è detta la **matrice della rototraslazione**.

Come si sa dalle lezioni di Algebra Lineare la relazione tra le coordinate (x, y) di un punto P nel sistema $O\vec{x}\vec{y}.u$ e le coordinate della stesso punto nel sistema $O'\vec{X}\vec{Y}.u$ è data da :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Se $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ è un vettore colonna e anche $\underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$ lo è le (4.8) si possono anche scrivere:

$$\underline{x} = Q\,\underline{X} \tag{4.9}$$

da cui prendendo le trasposte di ambo i membri si ha ${}^t\underline{x} = {}^t\underline{X}{}^tQ$.
Se scriviamo l'equazione (4.2) della conica data in forma compatta

$$ {}^t\underline{x}\, B\, \underline{x} = 0, \tag{4.10} $$

utilizzando le (4.9) si ha:

$$ {}^t\underline{X}({}^tQBQ)\underline{X} = 0, \tag{4.11} $$

che è l'equazione della conica in una delle due forme I) o II), a cui si perviene operando nel modo precedentemente descritto. In (4.11) la matrice B' della conica è $B' = {}^tQBQ$ e la sottomatrice A' è simile alla sottomatrice A di B, in quanto la parte quadratica $\phi_2(X,Y)$ è proprio quella che si ottiene dopo aver fatto la rotazione; per convincersi di ciò si tenga conto di quanto detto nella Osservazione 10 .

I ragionamenti sin qui fatti ci permettono di trarre la seguente importante conclusione:

Teorema 1 *Data una conica* Γ *a coefficienti reali di equazione* ${}^t\underline{x}\, B\, \underline{x} = 0$ *è sempre possibile operare una rototraslazione, di matrice* Q*, tale che* Γ *nel nuovo riferimento* $O'\vec{X}\vec{Y}.u$ *abbia una delle seguenti due forme:*

$$ I) \quad \alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma \qquad \text{oppure} \qquad II) \quad \beta Y^2 = 2\gamma X. $$

Inoltre dette B *e* A *la matrice della conica e la sottomatrice dei termini di secondo grado in* x *e in* y *e rispettivamente* B' *e* A' *le corrispondenti matrici per la conica in forma ridotta si ha:*

- *(a)* B *e* B' *hanno lo stesso determinante e lo stesso rango.*
- *(b)* A *e* A' *sono simili e hanno quindi lo stesso polinomio caratteristico, lo stesso determinante e la stessa traccia.*

Dimostrazione. La prima parte è già stata provata.

Per (a) basta osservare che $B' = {}^tQBQ$ e che $detQ = det{}^tQ = 1$; come conseguenza del teorema di Binet si ha $det(B') = det(B)$.
Le matrici B e B' hanno lo stesso rango perché sono ottenute moltiplicando, a sinistra e a destra, per matrici invertibili.

La (b) è una immediata conseguenza della similitudine di A e A'. Infatti matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, lo stesso determinante e la stessa traccia. $\square$

Definizione 8 *I numeri $det(B)$, $det(A)$, $\rho(B)$, $tr(A)$ si dicono* **invarianti ortogonali** *in quanto si mantengono inalterati dopo una rototraslazione.*

4.3 Significato geometrico del rango di B

Teorema 2 *Data la conica Γ,condizione necessaria e sufficiente perché:*

(a) Γ sia spezzata in due rette coincidenti è che $\rho(B) = 1$.

(b) Γ sia spezzata in due rette distinte è che $\rho(B) = 2$.

(c) Γ sia irriducibile è che $\rho(B) = 3$.

Dimostrazione. Visto che $\rho(B)$ è un invariante ortogonale ci si può riferire alle forme canoniche I) e II).
(a) Riferiamoci alle coniche del tipo I). Allora se $\rho(B') = 1$ deve accadere che due dei tre numeri α, β e γ siano nulli e il terzo non nullo; da ciò segue immediatamente che la conica si spezza in due rette coincidenti.
Viceversa sia: $\alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma T^2 \equiv (aX + bY + cT)^2$.
La precedente per il principio di identità dei polinomi, può sussistere solo se due dei tre numeri α, β, γ sono nulli e il terzo è non nullo. Quindi la conclusione. In modo analogo si ragiona se la conica è del tipo II).
(b) Se $\rho(B') = 2$ è immediato che la conica si spezza in due rette distinte.
Viceversa, se il polinomio che definisce Γ si spezza nel prodotto di due fattori lineari distinti, $(*)$ $\alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma T^2 \equiv (aX + bY + cT)(a'X + b'Y + c'T)$, allora $\rho(B) = 2$.
Infatti se le due rette di equazioni $aX + bY + cT = 0$ e $a'X + b'Y + c'T = 0$ si incontrano in un punto proprio P_0, si fa una traslazione in P_0, e l'equazione di Γ assume la forma $(p\overline{X} + q\overline{Y})(p'\overline{X} + q'\overline{Y}) = 0$; il rango di tale conica, che è uguale al rango di B, è ≤ 2. Tenuto conto di (a) segue che $\rho(B) = 2$.
Se il punto P_0 è improprio con una opportuna rotazione l'equazione di Γ si può scrivere nella forma $(q\overline{Y} + r\overline{T})(q'\overline{Y} + r'\overline{T}) = 0$. Anche in tal caso il rango di B' è ≤ 2. Si procede in modo analogo e si ha la stessa conclusione.
(c) Segue per esclusione. $\square$

4.4 Ricerca dei punti impropri di una conica

I punti impropri di una conica si determinano dal sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Se $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ la conica è spezzata e contiene come parte la retta impropria. In tal caso la conica ha infiniti punti impropri.

Se ciò non si verifica la conica ha sempre due punti impropri che si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

e le cui coordinate sono date da:

$$(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}},\, a_{11}, 0), \quad (-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\,,\, a_{11}, 0) \quad \text{se } a_{11} \neq 0$$

$$(1, 0, 0), \quad (a_{22}, -2a_{12}, 0) \quad \text{se} \quad a_{11} = 0$$

Tali punti saranno	**reali e distinti**	se	$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
	reali e coincidenti	se	$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
	immaginari e coniugati	se	$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0.$

4.5 Classificazione delle coniche irriducibili

Definizione 9 *Una conica* irriducibile*, cioè tale che* $det(B) \neq 0$*, si dice:*

Iperbole	se ha due punti impropri reali e distinti,	cioè se $det(A) < 0.$
Parabola	se ha due punti impropri reali e coincidenti,	cioè se $det(A) = 0.$
Ellisse	se ha due impropri immaginari e coniugati,	cioè se $det(A) > 0.$

Osservazione 11 *Le coniche I)* $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$ *oppure II)* $\beta Y^2 = 2\gamma X$ *sono irriducibili se tutti i coefficienti che vi figurano sono non nulli.*

Dalla I) segue:

$$\frac{X^2}{\frac{\gamma}{\alpha}} + \frac{Y^2}{\frac{\gamma}{\beta}} = 1.$$

Se α e β sono concordi nel segno, allora $det(A) > 0$; se hanno anche lo stesso segno di γ, ponendo $\frac{\gamma}{\alpha} = a^2$ e $\frac{\gamma}{\beta} = b^2$ l'equazione si può anche scrivere nella forma:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

che è l'equazione di una ellisse reale.
Se α e β hanno segno opposto a quello di γ l'equazione si può scrivere:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

avendo posto $a^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$ e $b^2 = -\frac{\gamma}{\beta}$.
In tal caso si ha l'equazione di una ellise immaginaria.
Se invece α e β sono discordi, allora $det(A) < 0$. Allora la conica è una iperbole che, con opportune posizioni si può scrivere:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Questa è l'equazione canonica di una iperbole.
Dalla equazione II) ponendo $\frac{\gamma}{\beta} = p$ si ha :

$$Y^2 = 2pX$$

che è l'equazione canonica di una parabola. In tal caso $det(A) = 0$.

4.6 Studio delle coniche in forma canonica

4.6.1 Studio dell'ellisse in forma canonica

Cominciamo col considerare l'equazione canonica dell'ellisse reale

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \tag{4.12}$$

Cerchiamo di evidenziare le principali proprietà. Scrivendo la (4.12) nella forma $\frac{X^2}{a^2} = \frac{b^2 - Y^2}{b^2}$ si ha che i punti reali che la soddisfano sono tali che

$b^2 - Y^2 \geq 0$ e ciò accade per $-b \leq Y \leq b$. Analogamente si vede che le ascisse dei punti reali dell'ellisse (4.12) sono tali che $-a \leq X \leq a$.
I numeri a e b si dicono i *semiassi* dell'ellisse. L'origine O del riferimento è centro di simmetria; ciò si deduce dal fatto che se (α, β) soddisfa la (4.12) anche il suo simmetrico rispetto ad O, che ha coordinate $(-\alpha, -\beta)$, soddisfa la (4.12).
Cambiando X in $-X$ l'equazione (4.12) non cambia; questo vuol dire che l'asse $\vec{Y}$ del dato riferimento è un *asse di simmetria per la data ellisse.* Analogamente l'asse $\vec{X}$ è un asse di simmetria.
Da (4.12) si ha ancora: $Y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - X^2)$. Riferendoci al ramo delle Y positive si ha $Y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - X^2}$, da cui si deduce che al crescere di X da 0 ad a la Y decresce da b a 0. Supposto $a \geq b$ il grafico della parte reale della (4.12) è il seguente:

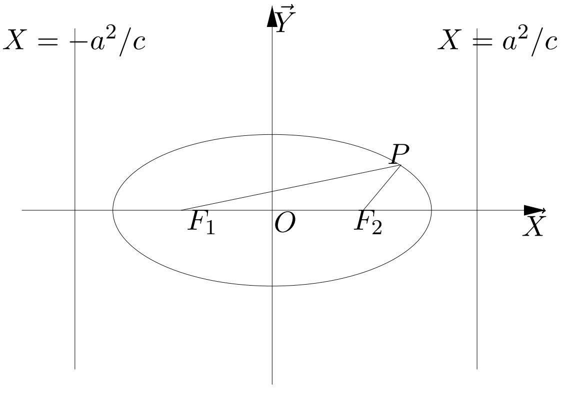


fig.28

Se $a > b$ introduciamo i due punti $F_1(-c, 0)$ ed $F_2(c, 0)$ dove $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Tali punti, quando ci si riferisce alla forma canonica considerata, si dicono i **fuochi** della nostra ellisse. Essi si possono caratterizzare in vario modo.

Una elementare proprietà è che l'equazione (4.12) si può ottenere come equazione del luogo geometrico dei punti $P(X, Y)$ del piano tali che :

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Consideriamo inoltre le rette di equazione $X = -\dfrac{a^2}{c}$ e $X = \dfrac{a^2}{c}$. Relativa-

mente alla forma canonica considerata tali rette si dicono rispettivamente le **direttrici** relative ai fuochi F_1 ed F_2.
Sussiste la seguente

Proposizione 13 *Il rapporto delle distanze dei punti propri e reali P dell'ellisse da un fuoco e dalla relativa direttrice è costante. Tale costante si dice* l'eccentricità, *e si indica con* e. *Risulta che* $\mathrm{e} = \dfrac{c}{a}$, *e nell'ellisse è sempre* $\mathrm{e} < 1$.

Osserviamo che nel caso in cui $a < b$ tutto quanto osservato si ripete allo stesso modo. In tal caso si pone $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, i fuochi sono i punti dell'asse $\vec{y}$: $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ e le relative direttrici sono le rette di equazione: $Y = -\dfrac{b^2}{c}$, $\quad Y = \dfrac{b^2}{c}$. Ovviamente continuano a sussistere le proprietà che abbiamo citato.

4.6.2 Studio dell'iperbole in forma canonica

L'equazione in forma canonica è

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1. \tag{4.13}$$

Per l'iperbole si potrebbe ripetere la stessa analisi fatta per l'ellisse. Non vale la pena di ripetere i dettagli. Le conclusioni a cui si arriva sono le seguenti:

1. La parte reale della curva si ottiene per $X \leq -a$ e $X \geq a$.
2. L'origine del riferimento è centro di simmetria.
3. Gli assi $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ sono di simmetria per la curva.
4. Le due rette $Y = \pm\dfrac{b}{a}X$, che congiungono il centro di simmetria con i due punti impropri della iperbole sono asintoti per la curva; ciò vuol dire, come vedremo, che tali rette sono tangenti alla iperbole nei suoi punti impropri.
5. Detto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, i due punti $F_1(-c, 0)$ ed $F_2(c, 0)$ sono i **fuochi** dell'iperbole e le due rette $X = -\dfrac{a^2}{c}$ e $X = \dfrac{a^2}{c}$ le rispettive **direttrici**.

Il grafico della iperbole è il seguente:

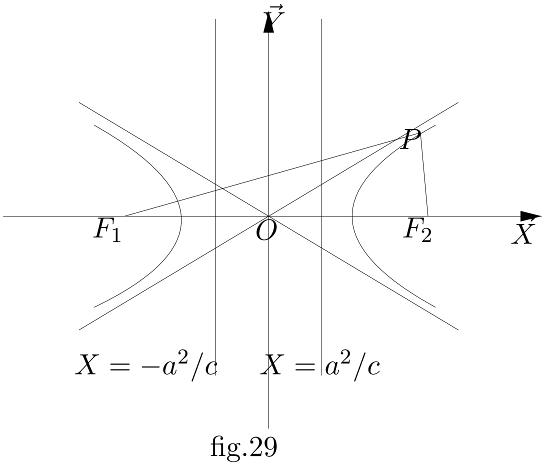


fig.29

L'equazione dell'iperbole si può ottenere come il *luogo geometrico* dei punti propri e reali P del piano tali che

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Sussiste anche la seguente:

Proposizione 14 *Il rapporto delle distanze dei punti propri e reali P dell'iperbole da un fuoco e dalla relativa direttrice è costante. Tale costante si chiama* **eccentricità** e*; si trova che* $\mathrm{e} = \frac{c}{a}$*; nell'iperbole si ha sempre* $\mathrm{e} > 1$.

È immediato provare quanto affermato in 4. e cioè che i due asintoti $Y = \pm\frac{b}{a}X$ sono le congiungenti l'origine, che è il centro di simmetria, con i due punti impropri dell'iperbole.
Infatti dal sistema

$$\begin{cases} T = 0 \\ \dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = T^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T = 0 \\ \dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T = 0 \\ (bX + aY)(bX - aY) = 0 \end{cases}$$

si ha che i punti impropri dell'iperbole sono $(a, b, 0)$ e $(a, -b, 0)$; essi caratterizzano le rette di coefficienti angolari $\pm\frac{b}{a}$. Quindi le congiungenti l'origine

O e tali punti sono proprio $Y = \pm \dfrac{b}{a} X$.
Da quanto precede si vede subito che i punti impropri della iperbole considerata sono in direzioni ortogonali se e solo se $a^2 = b^2$. In questo caso ciò equivale a dire che la traccia $Tr(A) = 0$.
In generale si pone la seguente

Definizione 10 *Una conica irriducibile si dice che è una* **iperbole equilatera** *se ha i punti impropri reali e in direzioni ortogonali.*

Sussiste la seguente

Proposizione 15 *La $Tr(A) = 0$ caratterizza le coniche contenenti come parte la retta impropria, oppure che hanno due punti impropri reali e in direzioni ortogonali.*
In particolare le coniche irriducibili tali che $Tr(A) = 0$ sono tutte e sole iperboli equilatere.

Dimostrazione. Se la conica data ha equazione: $t(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}t) = 0$ è chiaro che $Tr(A) = 0$. Supponiamo che almeno uno dei numeri a_{11}, a_{12}, a_{22} sia non zero. Allora, come sappiamo, i punti impropri hanno coordinate:

$$(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, a_{11}, 0); \text{ e } (-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, a_{11}, 0) \quad \text{se } a_{11} \neq 0$$

Se essi sono reali e in direzioni ortogonali dovrà essere zero la somma dei prodotti delle coordinate omonime; cioè dovrà essere $a_{11}(a_{11} + a_{22}) = 0$. Ma $a_{11} \neq 0$; quindi $Tr(A) = 0$.
Se $a_{11} = 0$ i punti impropri sono $(1, 0, 0)$; $(a_{22}, -2a_{12}, 0)$ e per essere in direzione ortogonale dev'essere $a_{22} = 0$; anche in tal caso la traccia $Tr(A) = 0$.
Viceversa se $Tr(A) = a_{11} + a_{22} = 0$, allora può essere $a_{11} = a_{22} = 0$ oppure $a_{11} = -a_{22} \neq 0$. Nel primo caso se anche $a_{12} = 0$ allora la conica contiene come parte la retta impropria; se invece $a_{12} \neq 0$ i punti impropri sono $X_\infty = (1, 0, 0)$ e $Y_\infty = (0, 1, 0)$ che sono ovviamente in direzioni ortogonali.
Se invece $a_{11} = -a_{22} \neq 0$ si deduce che i punti impropri sono reali e distinti e in direzioni ortogonali. In tal caso infatti essi sono:
$(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}, a_{11}, 0)$ e $(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}, a_{11}, 0)$.
Facendo la somma dei prodotti delle componenti omonime si ha: $a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{12}^2 - a_{11}^2$ che è zero e quindi si ha la condizione di ortogonalità. $\square$

4.6.3 Studio della parabola in forma canonica

L'equazione canonica della parabola è

$$Y^2 = 2pX. \tag{4.14}$$

Per fissare le idee supponiamo che $p > 0$. Le cose importanti da notare sono le seguenti:

1. La parte reale della curva si ha per $X \geq 0$.
2. L'asse $\vec{X}$ è di simmetria per la nostra curva.
3. L'asse $\vec{Y}$ incontra la curva in due intersezioni coincidenti in O.
4. L'asse di simmetria incontra la parabola in due punti: uno proprio detto **vertice** ed un altro improprio, detto **punto improprio della parabola**; quest'ultimo è il punto in cui la retta impropria incontra la parabola in due punti impropri coincidenti.
5. Il punto $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ è il **fuoco della parabola**, e la retta $X = -\frac{p}{2}$ la corrispondente **direttrice**.

Il grafico di una tale parabola è del tipo seguente:

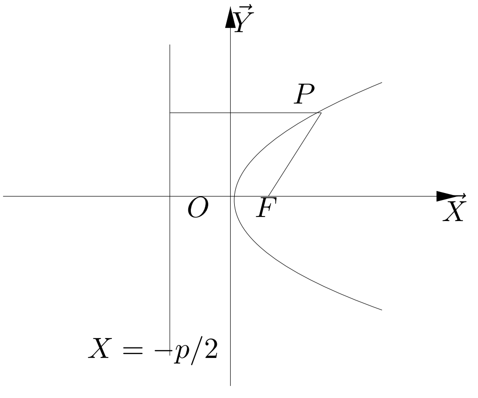


fig.30

Proposizione 16 *L'equazione della parabola si può ottenere come il luogo geometrico dei punti propri e reali P del piano che sono equidistanti dal fuoco e dalla relativa direttrice. Tale rapporto si chiama* l'eccentricità e. *Ne segue che nella parabola è sempre* e $= 1$.

4.7 Centro ed assi di simmetria

Dall'esame delle equazioni canoniche abbiamo dedotto che ellissi ed iperboli hanno un centro e due assi di simmetria, che sono l'origine O' e gli assi $\vec{X}$ e $\vec{Y}$. Ricordiamo che per ridurre una conica dalla sua forma generale a quella canonica abbiamo operato una rototraslazione. È chiaro che la rotazione è necessaria se $a_{12} \neq 0$.
La rotazione muta il riferimento ortogonale $O\vec{x}\vec{y}$ nel riferimento, anch'esso ortogonale, $O\vec{X}^{\star}\vec{Y}^{\star}$; dopo si applica la traslazione che trasforma il riferimento $O\vec{X}^{\star}\vec{Y}^{\star}$ nel riferimento $O'\vec{X}\vec{Y}$, rispetto a cui la conica assume la forma canonica. Quindi gli assi $\vec{X}^{\star}$ e $\vec{Y}^{\star}$ sono paralleli agli assi di simmetria della conica.
Da un punto di vista algebrico la rotazione fa sì che la base antioraria $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ che individua il riferimento $O\vec{x}\vec{y}$ venga cambiata nella base antioraria di *autovettori normalizzati* (I,J), che come sappiamo saranno i versori dei nuovi assi $\vec{X}^{\star}$ e $\vec{Y}^{\star}$.
Come è noto dal Teorema spettrale, per fare ciò si diagonalizza A mediante una matrice P ortogonale di tipo speciale, cioè tale che $det(P) = 1$. Come sappiamo, tali matrici sono associate a rotazioni antiorarie del riferimento.
Di fatto si opera nel modo seguente: detti α e β gli autovalori di A, gli autospazi associati, su cui stanno gli autovettori I e J, hanno equazioni rispettivamente:

$$(a_{11} - \alpha)x + a_{12}y = 0, \qquad (a_{11} - \beta)x + a_{12}y = 0 \quad \text{con } a_{12} \neq 0. \tag{4.15}$$

Queste due rette danno le equazioni degli assi $\vec{X}^{\star}$ e $\vec{Y}^{\star}$ e quindi sono **parallele agli assi di simmetria** della conica considerata.

La traslazione che porta l'origine O nella nuova origine O' fa sì che O' sia centro di simmetria e pertanto l'equazione ${}^t\underline{X}\, B'\, \underline{X} = 0$ non deve contenere termini di primo grado in X e Y. Perchè ciò accada devono essere nulli a'_{13} e a'_{23}.
Tali coefficienti sono le prime due componenti del vettore riga

$$(0, 0, 1)B' = (0, 0, 1)\, {}^tQBQ,$$

dove $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice della traslazione dall'origine O alla nuova origine $O' = (a, b)$. Riprendendo la precedente si ha:

$$(0, 0, 1)^t QBQ = (a, b, 1)BQ = (a_{11}a + a_{12}b + a_{13}, a_{12}a + a_{22}b + a_{23}, -).$$

Si deduce quindi che il punto $O' = (a, b)$ le cui coordinate soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b + a_{13} = 0 \\ a_{12}a + a_{22}b + a_{23} = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

è il **centro di simmetria della conica**.

Dallo studio della forma canonica della parabola abbiamo visto che non c'era un centro di simmetria; il riscontro analitico si ha osservando che il sistema precedente, nel caso in cui il determinante dei coefficienti è nullo, è incompatibile, in quanto il rango della matrice dei coefficienti è uno mentre il rango della matrice completa è due. Quindi le parabole non hanno centro di simmetria.

Per le parabole sappiamo che la sottomatrice A ha gli autovalori 0 e β. Con considerazioni analoghe a quelle fatte per le ellissi e le iperboli, si può provare che per le parabole l'autospazio associato all'autovalore nullo è una retta parallela all'asse di simmetria.

4.8 Circonferenze

Come è noto il luogo dei punti P del piano che distano $r > 0$ dal punto di coordinate (α, β) ha equazione: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$. Questa è l'equazione di una circonferenza, in senso elementare.

Ora noi vogliamo generalizzare tale nozione dicendo che una circonferenza è il luogo dei punti propri o impropri, reali o immaginari che con le loro coordinate soddisfano una equazione: $(x - \alpha t)^2 + (y - \beta t)^2 = ht^2$, con h parametro reale non nullo.

Per abuso di linguaggio diremo che l'equazione $(x - \alpha t)^2 + (y - \beta t)^2 = 0$ rappresenta una circonferenza di centro (α, β) e raggio nullo, pur essendo una conica spezzata nelle due rette immaginarie coniugate:
$[(x - \alpha t) + i(y - \beta t)][(x - \alpha t) - i(y - \beta t)] = 0.$

È immediato vedere che sviluppando i calcoli nell'equazione della data circonferenza si ottiene una conica in cui $a_{11} = a_{22} \neq 0, \quad a_{12} = 0$. Viceversa se una conica è tale che le precedenti condizioni sono verificate, allora la conica è una circonferenza in senso generalizzato. Infatti, tenendo conto di tali condizioni, dividendo ambo i membri per $a_{11} \neq 0$, l'equazione della conica si può scrivere:

$$x^2 + y^2 + \frac{2a_{13}}{a_{11}}x + \frac{2a_{23}}{a_{11}}y + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0.$$

Completando i quadrati l'equazione della conica si può scrivere:

$$\left[x - (-\frac{a_{13}}{a_{11}})\right]^2 + \left[y - (-\frac{a_{23}}{a_{11}})\right]^2 = \left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{a_{11}}.$$

Dalla precedente si deduce che posto $h = \left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{a_{11}}$,
nel caso in cui $h > 0$, si ha una circonferenza reale di centro $C = \left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}, -\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)$
e raggio $r = \sqrt{h}$.
Col precedente metodo del completamento dei quadrati si ha che se una circonferenza ha equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{4.17}$$

allora le **coordinate del suo centro** sono $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e il **raggio**, nel caso che $h = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$, è dato da $\sqrt{h}$.
Adesso data una qualunque circonferenza $(x - \alpha t)^2 + (y - \beta t)^2 = ht^2$, cerchiamo i suoi punti impropri; essi si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Tale sistema dà come soluzioni i due punti impropri e immaginari:
$C_1 = (1, i, 0),\ C_2 = (1, -i, 0)$, i quali sono detti i **punti ciclici** del piano.

Si definiscono poi **le rette isotrope** uscenti dal punto $P = (a, b)$ come le rette PC_1 e PC_2 congiungenti P con i punti ciclici. Quindi le rette isotrope uscenti da $P = (a, b)$ sono le rette aventi equazioni: $y - b = \pm i(x - a)$.

Facendo il prodotto di tali rette si ottiene la conica di equazione $(x-a)^2+(y-b)^2=0$, che come sappiamo rappresenta il cerchio di centro P e raggio nullo.
Proviamo adesso la seguente

Proposizione 17 *Se una conica passa per i punti ciclici, allora o contiene come parte la retta impropria, oppure è una circonferenza.*

Dimostrazione. Imponendo alla generica conica del piano di passare per i punti ciclici si trova che i suoi coefficienti devono soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}+2a_{12}i-a_{22}=0 \\ a_{11}-2a_{12}i-a_{22}=0. \end{cases}$$

Sommando e sottraendo, membro a membro, si deduce: $a_{11}=a_{22}$; $\quad a_{12}=0$. Ed allora se $a_{11}=a_{22}=0$ la nostra conica è spezzata nella retta impropria ed in una ulteriore altra retta; se invece $a_{11}=a_{22}\neq 0$, insieme a $a_{12}=0$, sono soddisfatte le condizioni che ci dicono che la nostra conica è una circonferenza. $\square$

4.9 Tangenti e polari

Data la conica irriducibile Γ, poniamo la seguente

Definizione 11 *Diremo che la retta* r *è* **tangente** *a* Γ *nel suo punto* P_0 *se essa incontra* Γ *in due punti coincidenti in* P_0.

Vogliamo provare che una conica irriducibile Γ in ogni suo punto P_0 proprio o improprio, reale o immaginario, ammette una ed una sola retta tangente. Precisamente dimostriamo il seguente

Teorema 3 *Data la conica* Γ *irriducibile di equazione* ${}^t\underline{x}\,B\,\underline{x}=0$, *sia* P_0 *un suo punto qualunque di coordinate* $\underline{x}_0$. *Allora esiste la tangente a* Γ *in* P_0 *e la sua equazione è* ${}^t\underline{x}_0\,B\,\underline{x}=0$.

Dimostrazione. Sia P_0P_1 una retta generica per P_0; la sua equazione in forma vettoriale omogenea si può scrivere : $\underline{x}=\lambda\underline{x}_0+\mu\underline{x}_1$, dove $\underline{x}_0$, $\underline{x}_1$ sono le coordinate omogenee di P_0 e P_1.
Sostituendo nell'equazione della conica: ${}^t\underline{x}\,B\,\underline{x}=0$, si ha la risolvente:

$${}^t(\lambda\underline{x}_0+\mu\underline{x}_1)\,B\,(\lambda\underline{x}_0+\mu\underline{x}_1)=0.$$

Sviluppando i prodotti di matrici si ha:

$$\lambda^2({}^t\underline{x}_0\,B\,\underline{x}_0) + \lambda\mu\,({}^t\underline{x}_0\,B\,\underline{x}_1) + \lambda\mu\,({}^t\underline{x}_1\,B\,\underline{x}_0) + \mu^2\,({}^t\underline{x}_1\,B\,\underline{x}_1) = 0. \qquad (4.18)$$

Ma ${}^t\underline{x}_1\,B\,\underline{x}_0$ è una matrice 1×1, quindi coincide con la sua trasposta ${}^t({}^t\underline{x}_1\,B\,\underline{x}_0) = {}^t\underline{x}_0\,B\,\underline{x}_1$, perché ${}^tB = B$. D'altra parte ${}^t\underline{x}_0\,B\,\underline{x}_0 = 0$, visto che $P_0 \in \Gamma$. Ne segue che la risolvente si può scrivere:

$$2\lambda\mu\,({}^t\underline{x}_0\,B\,\underline{x}_1) + \mu^2\,({}^t\underline{x}_1\,B\,\underline{x}_1) = 0. \qquad (4.19)$$

Perché la retta P_0P_1 incontri Γ in due intersezioni coincidenti in P_0, dalla (4.19) dobbiamo ottenere la risolvente $\mu^2 = 0$. Perché ciò accada dev'essere: ${}^t\underline{x}_0\,B\,\underline{x}_1 = 0$.
In altre parole perché P_0P_1 sia tangente bisogna congiungere P_0 con i punti P_1 le cui coordinate soddisfano l'equazione ${}^t\underline{x}_0\,B\,\underline{x} = 0$. Quest'ultima è l'equazione di una retta sempre perfettamente determinata perché non può accadere che sia ${}^t\underline{x}_0\,B = (0,0,0)$ altrimenti, essendo la matrice B invertibile, seguirebbe ${}^t\underline{x}_0 = (0,0,0)$. $\square$

Osservazione 12 *In termini più espliciti se P_0 ha coordinate ${}^t\underline{x}_0 = (x_0, y_0, t_0)$ l'equazione della tangente a Γ si può scrivere:*

$$(x_0, y_0, t_0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0,$$

che si può esprimere come:

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}t_0)x+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}t_0)y+(a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}t_0)t = 0.$$

È interessante osservare che la precedente formula si applica in ogni caso, sia che il punto è proprio o improprio, reale o immaginario.

4.9.1 Polarità rispetto ad una conica

Sia data una conica irriducibile Γ, quindi con $det(B) \neq 0$. Sia adesso $P_0 = (x_0, y_0, t_0)$ un punto *qualunque* del piano non necessariamente appartenente a Γ.

Definizione 12 *Diremo* **polare** *di P_0 rispetto alla conica Γ la retta p_0 di equazione: ${}^t\underline{x}_0\,B\underline{x} = 0$.*

È immediato osservare che p_0 è sempre perfettamente determinata. Altrimenti ${}^t\underline{x}_0\, B = (0,0,0)$ e quindi come prima seguirebbe che ${}^t\underline{x}_0 = (0,0,0)$, che è assurdo.

Viceversa data una qualunque retta r del piano di equazione $ax+by+ct=0$ esiste un unico punto R che ha r come sua polare.
Infatti sia ${}^t\underline{x}_0\, B\underline{x} = 0$ la polare del generico punto P_0. Se vogliamo identificare questa retta con r dobbiamo imporre la proporzionalità dei coefficienti, cioè $B\,\underline{x}_0 = \rho \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
Essendo per ipotesi $det(B) \neq 0$, tale sistema ammette, per il teorema di Cramer, una e una sola soluzione $\underline{x}_0$, che è certamente non nulla perché $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, ed il sistema è non omogeneo.
Così il polo di r è sempre perfettamente determinato.

Definizione 13 *La corrispondenza biunivoca tra tutti i punti del piano e tutte le rette del piano, così definita, si chiama* **la polarità** *rispetto alla conica irriducibile* Γ.

Riferendoci alle notazioni fin qui usate, mettiamo in evidenza alcune importanti proprietà della polarità.

1. La polare di un punto P_0 appartenente alla conica è la tangente in P_0 alla conica stessa.

2. **Teorema di reciprocità**: P_0 *appartiene alla polare* p_1 *di un punto* P_1 *se e solo se* P_1 *appartiene alla polare* p_0 *di* P_0.

DIMOSTRAZIONE. $P_0 \in p_1 \iff {}^t\underline{x}_1\, B\,\underline{x}_0 = 0$. Il primo membro della precedente è una matrice 1×1, quindi coincide con la sua trasposta.
Ne segue ${}^t\underline{x}_0\, B\,\underline{x}_1 = 0 \iff P_1 \in p_0$.

Definizione 14 *Due punti* P_0 *e* P_1 *con la proprietà che l'uno appartenga alla polare dell'altro, si dicono* **coniugati** *nella polarità.*
Un punto si dice **autoconiugato** *se appartiene alla propria polare.*
Dualmente: due rette si dicono **coniugate** *se l'una contiene il polo dell'altra; una retta si dice* **autoconiugata** *se contiene il proprio polo.*

3. I punti autoconiugati sono tutti e soli i punti della conica. Le rette autoconiugate sono tutte e sole le tangenti alla conica.

DIMOSTRAZIONE. Infatti: $P_0 \in p_0 \iff {}^t\underline{x}_0\, B\underline{x}_0 = 0 \iff P_0 \in \Gamma$.
Discende subito che le rette autoconiugate sono tutte e sole le tangenti alla

conica.

4. **Tangenti e polari**. *Se* $P_0 \notin \Gamma$ *la sua polare* p_0*, non essendo tangente a* Γ*, la incontra in due punti* T_1 *e* T_2 *tali che* P_0T_1 *e* P_0T_2 *sono tutte e sole le tangenti alla conica* Γ *condotte da* P_0*.*

DIMOSTRAZIONE. I punti P_0 e T_1 sono coniugati; quindi la tangente in T_1 alla conica deve contenere T_1 e P_0; allora deve coincidere con P_0T_1.

Viceversa se la retta $\underline{t}$ per P_0 è tangente in A a Γ si ha che A e P_0 sono coniugati perché $P_0 \in p_A$; allora per il teorema di reciprocità $A \in p_0$.

5. In alcune applicazioni della Scienza delle Costruzioni sembra utile una particolare corrispondenza fra punti e rette del piano, detta **antipolarità**.

Data l'ellisse immaginaria Γ_i: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ e il punto $P_0 = (x_0, y_0, 1)$. La polare p_{0i} di P_0 rispetto a Γ_i ha equazione $\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y + 1 = 0$. Tale equazione coincide con la retta simmetrica rispetto all'origine O della polare di P_0 rispetto alla ellisse reale Γ di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

La retta che così si associa al punto P_0 si dice la *antipolare* del punto P_0.

Per come la antipolare è stata costruita segue che una antipolarità è il prodotto di una polarità per una simmetria.

4.9.2 Centro di una conica

Come abbiamo dimostrato la polarità è una corrispondenza biunivoca fra tutti i punti del piano e tutte le rette del piano.

Definizione 15 *Si chiama* **centro di una conica** *il polo della retta impropria.*

Troviamo le coordinate del centro. L'equazione della retta impropria è $t = 0$. Perché il punto P_0 di coordinate ${}^t\underline{x}_0 = (x_0, y_0, t_0)$ sia polo di $t = 0$ dobbiamo identificare l'equazione ${}^t\underline{x}_0\, B\, \underline{x} = 0$ della polare p_0 del punto P_0 alla $t = 0$. Per ciò si deve avere la proporzionalità dei coefficienti delle due equazioni. Allora dev'essere:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0 = 0; \quad a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0 = 0.$$

Il coefficiente di t nell'equazione della polare p_0 è certamente diverso da zero perché sappiamo che la polare di un punto è sempre perfettamente determinata, e quindi non possono essere contemporaneamente nulli i coefficienti di

$x, \ y,$ e t.
Quindi le coordinate del centro si trovano risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0 = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Questo è un sistema lineare omogeneo di due equazioni in tre incognite di rango due, visto che il $det(B) \neq 0$. Sappiamo che un tale sistema ammette una sola soluzione, a meno di un fattore di proporzionalità. Una base per lo spazio delle soluzioni si può prendere calcolando i determinanti a segno alternato dei minori che si ottengono sopprimendo ordinatamente le colonne dalla matrice dei coefficienti del sistema. È utile, riferendosi alla matrice B della conica, esprimere tale base mediante la terna non nulla:

$$x_0 = B_{13}; \quad y_0 = B_{23}; \quad t_0 = det(A)$$

dove A è la sottomatrice di B dei termini di secondo grado in x e y, e B_{13}, B_{23} sono i complementi algebrici di a_{13}, a_{23} in B.

Quindi il centro è un punto proprio se $det(A) \neq 0$. Ciò si verifica se la nostra conica è una ellisse o una iperbole. In tal caso, ponendo $t_0 = 1$, si vede che il centro soddisfa, con le sue coordinate, lo stesso sistema che è soddisfatto dalle coordinate del centro di simmetria della conica, quindi coincide con esso, vedi pagina 88 sistema (4.16).

Se invece $det(A) = 0$, nel caso in cui la nostra conica è una parabola, si vede subito che il sistema (4.20) ha una soluzione con $t_0 = 0$; quindi il punto trovato è improprio. In tal caso il centro è un punto autoconiugato e come tale appartiene alla parabola. Quindi è il punto improprio della parabola stessa.

In definitiva le parabole non hanno centro di simmetria, ma hanno il centro.

4.9.3 Diametri di una conica

Iniziamo il paragrafo con la seguente

Definizione 16 *Si chiamano* **diametri** *di una conica le rette passanti per il centro.*

Quindi, per il teorema di reciprocità, i diametri sono le polari dei punti impropri.
È interessante il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione, che dà una descrizione geometrica dei diametri.

Teorema 4 *Il diametro polare di un punto improprio $P_0 = (1, m, 0)$ è il luogo dei punti medi delle corde che hanno direzione data dal coefficiente angolare m.*

Osservazione 13

a) Esaminando l'equazione canonica della parabola $Y^2 = 2pX$ si vede che l'asse di simmetria è il luogo dei punti medi delle corde che hanno direzione ortogonale a quella data dal punto improprio della parabola stessa. Ne deriva un metodo per determinare l'asse di simmetria di una parabola. Tale proprietà è una proprietà intrinseca della parabola e quindi non dipende dal sistema di riferimento. Per cui, dovendo trovare l'asse di simmetria di una qualunque parabola si può adottare il *metodo seguente.*

> Si determina il suo punto improprio e poi il punto improprio in direzione ortogonale ad esso. **L'asse di simmetria** è proprio il diametro polare di quest'ultimo punto.

Una prova alternativa della precedente costruzione, che non tenga conto del Teorema 4 è la seguente:
l'asse di simmetria di una parabola congiunge il vertice col punto improprio della parabola. Quindi per la proprietà che lega le tangenti e le polari il polo dell'asse di simmetria è il punto comune alla tangente nel vertice e alla retta impropria. Tale punto è il punto improprio in direzione ortogonale al punto improprio della parabola, visto che la tangente nel vertice è una retta ortogonale all'asse.

b) Sempre dalle equazioni canoniche si vede subito che gli assi di simmetria di una ellisse o una iperbole, che come sappiamo sono ortogonali, sono anche coniugati perchè l'uno contiene il polo dell'altro. Se ne deduce, in generale, che gli assi di simmetria di una ellisse, non cerchio, o di una iperbole sono i diametri coniugati e ortogonali. Tale proprietà può essere utile nelle applicazioni.

c) Sia $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'equazione di una ellisse in forma canonica, con $a \geq b$. Come sappiamo i fuochi F_1, F_2 hanno coordinate $F_1 = (-c, 0)$ ed $F_2 = (c, 0)$, con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Si vede subito che la polare del fuoco F_2 è la relativa direttrice che come sappiamo ha equazione $x = \frac{a^2}{c}$. Un calcolo elementare prova che le rette isotrope uscenti dal fuoco F_2, che sono le due rette di equazioni $y = \pm i(x - c)$, sono tangenti all'ellisse e la incontrano, per il teorema che lega le tangenti alle polari, nei due punti immaginari comuni all'ellisse e alla direttrice. Quindi l' equazione complessiva delle tangenti uscenti da un fuoco di una ellisse è data dalla circonferenza di centro il fuoco e raggio nullo e i punti di contatto delle tangenti sono i punti comuni all'ellisse e alla relativa direttrice.
Tale proprietà vale anche per i fuochi delle iperboli e delle parabole.

4.10 Fasci di coniche

Noi abbiamo studiato le coniche che sono curve di ordine due in $\mathbb{P}^2$; ma si possono studiare curve algebriche di ordine n qualunque.
Una **curva algebrica** $\mathcal{C}$ di ordine n si definisce come il luogo dei punti propri o impropri, reali o immaginari che con le loro coordinate omogenee soddisfano una forma $F(x, y, t) = 0$, di grado n nelle variabili x, y, t.
C'è da convenire che se il polinomio $F(x, y, t)$ si spezza nel prodotto di k fattori irriducibili $F_1, F_2, \cdots, F_k$ ciascuno contato $n_1, n_2, \cdots, n_k$ volte, cioè se $F = F_1^{n_1} \cdot F_2^{n_2} \cdots, F_k^{n_k}$, allora la curva $\mathcal{C}$ è costituita dai punti di $\mathcal{C}_1 : \ F_1 = 0$ contati n_1 volte,$\cdots$, dai punti di $\mathcal{C}_k : \ F_k = 0$ ciascuno contato n_k volte.
Le curve di equazione $F_1 = 0, \cdots, F_k = 0$ si dicono le componenti irriducibili della curva di equazione $F = 0$.
Cominciamo innanzitutto con l'enunciare l'importante teorema:

Teorema 5 (Bézout) *Due curve algebriche C_1 e C_2 di ordini rispettivamente* m *ed* n *si incontrano in* mn *punti, che possono coincidere in vario modo, oppure hanno una componente in comune.*
In particolare, due coniche si incontrano in quattro punti, variamente coincidenti; oppure hanno una stessa retta come componente comune.

Proviamo l'importante risultato:

Teorema 6 *Siano dati nel piano 5 punti distinti $P_i = (x_i, y_i, t_i)$. Allora per essi passa una sola conica o ne passano infinite; questo secondo caso si verifica se e solo se almeno quattro dei cinque punti sono allineati.*

DIMOSTRAZIONE. Imponendo alla generica conica del piano, che ha equazione:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$$

il passaggio per ciascuno dei 5 punti P_i si ha un sistema di 5 equazioni omogenee nelle 6 incognite a_{ij}. Allora se il rango della matrice del sistema è 5 il sistema ammette infinite soluzioni tutte fra loro proporzionali e quindi una sola conica passa per i 5 punti, perché l'equazione di una conica è definita a meno di un fattore di proporzionalità. Se il rango della matrice dei coefficenti è minore di 5 il sistema ammette almeno ∞^2 soluzioni e quindi ci sono certamente infinite coniche passanti per i nostri 5 punti. Siano Γ_1 e Γ_2 due coniche distinte passanti per i 5 punti. Allora per il teorema di Bézout segue che necessariamente le due coniche sono spezzate ed hanno una retta L a comune. Allora Γ_1 è spezzata in L e in un'altra retta r, mentre Γ_2 si spezza in L e in altra retta s. I punti comuni a Γ_1 e Γ_2 sono i punti di L e il punto comune a r e s. Quindi almeno quattro dei cinque punti devono stare su L.
Se dati 5 punti almeno quattro sono allineati è allora ovvio che ci sono sempre infinite coniche contenenti i 5 punti. □

Questo teorema è soprattutto importante perché ci dice che per individure una conica si devono assegnare 5 condizioni lineari. Per esempio il passaggio per un punto è una condizione lineare; imporre ad una conica di avere in un punto una data tangente equivale a due condizioni lineari e così via.

Siano date due coniche distinte Γ_1 e Γ_2, di equazioni rispettivamente $f_1(P) = 0$ ed $f_2(P) = 0$.

Definizione 17 *Si dice* **fascio di coniche** *individuato da $f_1(P) = 0$ ed $f_2(P) = 0$ la totalità delle coniche la cui equazione si ottiene dalla combinazione lineare $\lambda_1 f_1(P) + \lambda_2 f_2(P) = 0$, al variare comunque di λ_1 e λ_2 purché $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$.*

È chiaro che per ottenere coniche distinte del fascio bisogna dare a λ_1 e λ_2 coppie di valori non proporzionali. Quindi per individuare una conica del fascio bisogna determinare il rapporto $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ o $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Un punto $\bar{P}$ comune alle due coniche Γ_1 e Γ_2 si dice un **punto base del fascio**. Per un punto base passano tutte le coniche del fascio; infatti imponendo alla generica conica del fascio $\lambda_1 f_1(P) + \lambda_2 f_2(P) = 0$ di passare per $\bar{P}$ si ha $\lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0$; quest'ultima è una identità rispetto a λ_1 e λ_2. Per un punto non base Q passa una sola conica del fascio; infatti in tal caso, essendo Q non base, almeno uno dei due coefficienti dell'equazione $\lambda_1 f_1(Q) + \lambda_2 f_2(Q) = 0$ è non nullo e quindi essa nel rapporto $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ o $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ammette una sola soluzione.

Proposizione 18 *In un fascio di coniche $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ ci sono tre coniche spezzate oppure tutte le coniche del fascio sono spezzate.*
Dire che sempre ci sono tre coniche spezzate deve intendersi che eventualmente qualcuna di esse deve contarsi con una certa molteplicità e d'altra parte qualcuna può essere spezzata in rette complesse. Ciò si chiarirà con la dimostrazione.

Dimostrazione. La matrice della generica conica del fascio è data da:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{13} + \mu b_{13} \\ \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \lambda a_{23} + \mu b_{23} \\ \lambda a_{13} + \mu b_{13} & \lambda a_{23} + \mu b_{23} & \lambda a_{33} + \mu b_{33} \end{pmatrix}$$

dove con a_{ij} si sono indicati i coefficienti della conica Γ_1 e con b_{ij} quelli della conica Γ_2. Il determinante di B è una somma di prodotti a tre a tre di fattori presi dalla precedente matrice per cui $|B| = a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3 = 0$ o è una identità rispetto a λ e μ oppure è una equazione omogenea di terzo grado in λ e μ, e per il teorema fondamentale dell'Algebra ammette tre radici nel campo complesso, in $\frac{\lambda}{\mu}$ oppure $\frac{\mu}{\lambda}$, contando le radici con la dovuta molteplicità. Quindi la conclusione. □

Un altro importante teorema riguardante i fasci è il seguente.

Teorema 7 *Un fascio di coniche è individuato da due sue qualunque coniche.*

Dimostrazione. Sia $(\mathcal{F})$: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ un fascio di coniche. Consideriamo in $(\mathcal{F})$ due coniche distinte:

$$g_1 \equiv \lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0 \quad \text{e} \quad g_2 \equiv \lambda_1'' f_1 + \lambda_2'' f_2 = 0. \tag{4.21}$$

Perché le due coniche siano distinte deve accadere che la matrice
$A = \begin{pmatrix} \lambda_1' & \lambda_2' \\ \lambda_1'' & \lambda_2'' \end{pmatrix}$ abbia determinante non nullo.
Consideriamo il fascio $(\mathcal{G}) : \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 = 0$. Ebbene è facile provare che $(\mathcal{F}) = (\mathcal{G})$, cioè dobbiamo provare che $(\mathcal{F}) \subseteq (\mathcal{G})$ e viceversa $(\mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{F})$. Cominciamo col provare la seconda. Se $\overline{g} \equiv hg_1 + kg_2 = 0$; sostituendo i valori dati dalle (4.21) si ha:

$$\begin{aligned} \overline{g} &\equiv h(\lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2) + k(\lambda_1'' f_1 + \lambda_2'' f_2) \\ &= (h\lambda_1' + k\lambda_1'')f_1 + (h\lambda_2' + k\lambda_2'')f_2 = 0. \end{aligned}$$

Quindi si vede che ogni conica del fascio $(\mathcal{G})$ è anche una conica del fascio $(\mathcal{F})$. È ovvio che l'inclusione opposta si otterrà se potremo esprimere f_1 e f_2 come combinazioni lineari di g_1 e g_2. Abbiamo visto che :

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1' & \lambda_2' \\ \lambda_1'' & \lambda_2'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando ambo i membri a sinistra per A^{-1}, visto che per ipotesi la matrice A è invertibile, si trovano le relazioni che permettono di esprimere f_1 e f_2 come funzioni lineari di g_1 e g_2, da cui si ha la conclusione. $\square$

Il precedente teorema è molto importante per le applicazioni perché una volta individuato un fascio, mediante i punti base o altre condizioni geometriche, esso si può ottenere come combinazione lineare di due qualunque coniche del fascio, le più disponibili possibile, per esempio quelle spezzate che è sempre facile trovare. Chiaramente la risoluzione di problemi in questo ambito aiuta a capire quali sono le scelte più opportune da fare.

A questo punto vogliamo introdurre alcuni concetti e terminologia che saranno utili nel seguito. Come sappiamo due coniche Γ_1 e Γ_2 distinte si incontrano in quattro punti, a meno che non abbiamo una stessa retta a comune. È stato ricordato che i punti comuni possono essere reali o immaginari, distinti o variamente coincidenti.

Nelle figure seguenti vengono considerate varie situazioni:

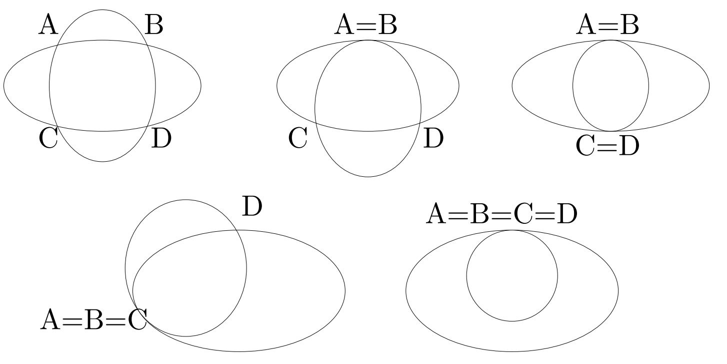


fig.31

1. Nella prima figura le due coniche si incontrano in 4 punti distinti. Le due coniche individuano un fascio di cui A, B , C , D sono i punti base. In tal caso, nel fascio, ci sono tre coniche spezzate distinte che sono AB–CD; AC–BD; AD–BC. C'è da osservare che le coppie di rette che vengono prese per individuare le coniche spezzate del fascio, devono essere scelte in modo che contengano tutti i punti base.

2. Nella seconda figura le due coniche si incontrano in due punti coincidenti in $A = B$ ed in tal caso si dice che le due coniche sono **tangenti** in A. In realtà hanno in A la stessa tangente φ_A. In questo caso le coniche spezzate del fascio sono date dalle coppie di rette: la tangente φ_A–retta CD e dalla coppia AC–AD; quest'ultima conica deve essere contata due volte, nel computo delle coniche spezzate. In questo caso ci sono due sole coniche spezzate distinte.

3. Nella terza figura le due coniche sono tangenti sia in $A = B$ che in $C = D$. In tal caso le due coniche si dicono **bitangenti** in $A = B$ e $C = D$. Le coniche spezzate sono date dalle seguenti due coppie di rette: le due tangenti $\varphi_A - \varphi_C$ e dalla congiungente i punti A e C

contata due volte. Quest'ultima conica deve essere contata due volte, nel computo delle coniche spezzate del fascio.

4. Nella quarta figura le due coniche sono tali che tre dei quattro punti coincidono in un unico punto, per esempio: $A = B = C$ e $D \neq A$ allora si dice che le coniche si **osculano** nel punto A. In questo caso c'è una sola conica spezzata costituita dalla tangente comune φ_A- e dalla retta AD. Questa conica deve contarsi tre volte nel computo delle coniche spezzate.

5. Infine nella quinta figura le due coniche distinte hanno tutti e quattro i punti comuni coincidenti $A = B = C = D$. Si dice in tal caso che le due coniche si **iperosculano** in A. La tangente comune φ_A contata due volte è l'unica conica spezzata del fascio; essa deve essere contata tre volte nel computo delle coniche spezzate.

4.10.1 Fasci di circonferenze

Applicando alle circonferenze i metodi ora studiati si ottengono delle situazioni speciali. Formiano un fascio mediante due circonferenze distinte C_1 e C_2, di equazioni: C_1) $x^2 + y^2 + axt + byt + ct^2 = 0$; C_2) $x^2 + y^2 + a_1xt + b_1yt + c_1t^2 = 0$. Ovviamente $(a, b, c) \neq (a_1, b_1, c_1)$. Le due circonferenze si incontrano in 4 punti di cui due sono i punti ciclici. Quindi i punti base del fascio sono i punti ciclici e due ulteriori altri punti A, B, che si possono trovare risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + axt + byt + ct^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1xt + b_1yt + c_1t^2 = 0. \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente al sistema formato dalla prima equazione e dall'equazione che si ottiene facendo la differenza delle due equazioni che è la conica spezzata nella retta impropria $t = 0$ e $(a - a_1)x + (b - b_1)y + (c - c_1)t = 0$. Ovviamente quest'ultima incontra le due circonferenze C_1 e C_2 nei due punti A e B. Tale equazione si chiama **l'asse radicale** del fascio di circonferenze.

In particolare se le due circonferenze sono tangenti ad una stessa retta r in

A allora l'asse radicale è la retta r tangente ad entrambe. Se per esempio si vuole trovare l'equazione del fascio di circonferenze tangenti ad $r)$ $ax + by + ct = 0$ in $A = (\alpha, \beta)$, basta formare il fascio come segue:

$$\lambda_1 \left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right] + \lambda_2(ax + by + ct)t = 0,$$

dove la prima conica è la circonferenza di centro $A = (\alpha, \beta)$ e raggio nullo che è una particolare conica del nostro fascio e la seconda è spezzata nell'asse radicale e nella retta impropria.

Una situazione interessante è quella in cui si forma il fascio di circonferenze mediante due circonferenze concentriche; in tal caso si ha $(a, b) = (a_1, b_1)$ e quindi l'asse radicale coincide con la retta impropria; in questo caso i punti base del fascio sono dati dai punti ciclici ciascuno contato due volte. Cioè due circonferenze concentriche sono bitangenti alla retta impropria nei punti ciclici. Ed allora se $A = (\alpha, \beta)$ è il centro delle due circonferenze il fascio si può scrivere mediante la circonferenza di centro A e raggio nullo e la retta impropria $t = 0$ contata due volte.

4.11 Applicazioni dei Fasci

Riportiamo nel seguito alcuni esempi che costituiscono degli esercizi tipo, per ulteriori successive applicazioni.

Esempio 17 *Determinare la conica passante per i seguenti 5 punti del piano:*

$$A = (1, 0);\ B = (-1, 0);\ C = (0, 1);\ D = (0, -1);\ E = (1, 1).$$

Piuttosto che partire dall'equazione della generica conica e imporre il passaggio per ciascuno dei punti precedenti è bene applicare il "metodo dei fasci". Esso consiste in questo: si può pensare che la nostra conica appartenga al fascio di coniche avente i primi 4 punti come punti base; scritto tale fascio la conica cercata è la conica del fascio passante per l'ulteriore punto $E = (1, 1)$. Il fascio, come abbiamo detto, si può individuare mediante due sue qualunque coniche indipendenti, eventualmente spezzate; per esempio si considerino le coniche spezzate nelle rette: AB, CD e nelle rette AC, BD. La prima conica ha equazione: $xy = 0$; la seconda ha equazione: $(x + y - 1)(x + y + 1) = 0$. Il fascio è dato dalla combinazione lineare:

$\lambda(xy) + \mu(x + y - 1)(x + y + 1) = 0$. Imponendo alla generica conica del fascio di passare per il punto $E = (1, 1)$ si deduce: $\lambda + 3\mu = 0$, da cui $\lambda = -3\mu$. La conica cercata è quindi: $-3xy + (x + y - 1)(x + y + 1) = 0$.

Esempio 18 *Trovare la conica passante per i punti:*

$$A = (-1, 0);\ B = (1, 0);\ C = (0, -1);\ D = (0, 1)$$

ed aventi in quest'ultimo la retta $y = 1$ come retta tangente.

La nostra conica si può pensare appartente al fascio di coniche tangenti alla retta $y = 1$ nel punto $D = (0, 1)$ e passanti per A e B. Individuiamo tale fascio mediante le coniche spezzate nella tangente $y = 1$, e nella congiungente A e B e poi nella conica spezzata nelle due rette DA e DB. Si ottiene così il fascio: $\lambda(y - 1)y + \mu(x + y - 1)(x - y + 1) = 0$. Imponiamo adesso alla generica conica del fascio il passaggio per il punto $C = (0, -1)$ e si ottiene la conica richiesta che ha equazione: $2y(y-1)+(x+y-1)(x-y+1) = 0$.

Esempio 19 *Date le due rette $r)\ x - y = 0$ ed $s)\ x + y = 0$ e i punti $A = (1, 1)$, $B = (1, -1)$ e $C = (\frac{1}{2}, 0)$. Determinare la conica tangente ad r e ad s, rispettivamente in A e in B, e passante per C.*

Tale conica appartiene al fascio delle coniche bitangenti ad r e ad s in A e in B. Il fascio si può individuare mediante la conica spezzata nelle due tangenti r ed s e la conica spezzata nella congiungente i punti di contatto delle tangenti contata due volte. Quindi essa appartiene al fascio:

$$\lambda_1(x - y)(x + y) + \lambda_2(x - 1)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per il punto C si ha la conica richiesta. Si ha: $\lambda_1(\frac{1}{4})+\lambda_2(\frac{1}{4}) = 0$. Da cui $\lambda_2 = -\lambda_1$ e sostituendo si ha: $x^2-y^2-x^2+2x-1 = 0$; si ottiene la parabola: $y^2 = 2x - 1$.

Esempio 20 *Trovare l'equazione dell'iperbole avente per asintoti le rette r ed s di equazioni rispettivamente $x + y - 1 = 0$ e $x - 2y - 2 = 0$ e passante per l'origine O.*

La nostra conica si può pensare appartenente al fascio di coniche bitangenti alle rette r ed s nei loro punti impropri. In tal caso il fascio si può scrivere:

$$\lambda_1(x+y-1)(x-2y-2)+\lambda_2 t^2=0.$$

Imponendo il passaggio per $O=(0,0)$ si ha $2\lambda_1+\lambda_2=0$. Si ottiene la conica:

$$(x+y-1)(x-2y-2)-2=0.$$

Esempio 21 *Determinare l'equazione della parabola avente la retta $x-y+3=0$ come diametro, tangente all'asse $\vec{y}$ nel punto $A=(0,1)$ e passante per il punto $B=(1,1)$.*

La nostra parabola si può pensare appartenente al fascio delle coniche bitangenti alla retta impropria nel punto improprio $(1,1,0)$ e all'asse $\vec{y}$ in A. Il fascio si può individuare:

$$\lambda_1 xt+\lambda_2(x-y+1)^2=0.$$

La retta $x-y+1=0$ è la congiungente il punto $A=(0,1)$ col punto improprio $(1,1,0)$. Per determinare l'equazione della parabola richiesta basta imporre il passaggio per il punto $B=(1,1)$. Si ottiene: $\lambda_1+\lambda_2=0$. La parabola ha quindi equazione: $(x-y+1)^2-x=0$.

Esempio 22 *Determinare il fascio delle coniche aventi fuoco in $F=(-1,3)$ e relativa direttrice la retta $d)$ $x+y-1=0$.*

Ricordando quanto abbiamo detto nella teoria, le rette isotrope uscenti da un fuoco sono tangenti alla conica nei punti in cui la conica è incontrata dalla relativa direttrice. La conica richiesta quindi appartiene al fascio delle coniche bitangenti alle rette isotrope uscenti dal fuoco nei punti in cui la direttrice incontra la conica. Il fascio richiesto si può quindi scrivere:

$$\lambda_1\left[(x+1)^2+(y-3)^2\right]+\lambda_2(x+y-1)^2=0.$$

Ciò perché l'equazione complessiva delle rette isotrope uscenti da un punto è data dal cerchio di centro quel punto e raggio nullo.

Esempio 23 *Data la parabola $y^2=2px$ con $p>0$, determinare il luogo dei punti P del piano da cui escono tangenti alla parabola perpendicolari.*

Sia $P = (\alpha, \beta)$ un punto appartenente al luogo. Troviamo l'equazione complessiva delle tangenti alla parabola uscenti da P. Essa è la conica, passante per P, del fascio individuato dalla parabola e dalla polare contata due volte. Il fascio è dato da:

$$\lambda(y^2 - 2px) + \mu(px - \beta y + p\alpha)^2 = 0$$

Imponendo il passaggio per $P = (\alpha, \beta)$ si ha:

$$\lambda(\beta^2 - 2p\alpha) + \mu(\beta^2 - 2p\alpha)^2 = 0$$

Si deduce che $\lambda = -\mu(\beta^2 - 2p\alpha)$. Sostituendo nell'equazione del fascio si ottiene l'equazione complessiva delle tangenti alla parabola dal puntp P:

$$-(\beta^2 - 2p\alpha)(y^2 - 2px) + (px - \beta y + p\alpha)^2 = 0$$

Volendo che tale conica abbia i punti impropri in direzione ortogonale dobbiamo porre $Tr(A) = a_{11} + a_{22} = 0$. Si ottiene: $p^2 + 2p\alpha - \beta^2 + \beta^2 = 0$. Cioè $\alpha = -p/2$, che dice che il punto P deve stare sulla direttrice.
Si deduce l'interessante proprietà geometrica:
La direttrice di una parabola è il luogo dei punti da cui escono tangenti alla parabola che sono ortogonali.

4.12 Esempi di studi di coniche

Esempio 24 *Studiare la conica* Γ *di equazione:* $4xy - 3y^2 - 8 = 0$*; trovare una sua forma canonica e determinare la rototraslazione che l'ha determinata.*

Cominciamo col calcolare gli invarianti della conica:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \mid B \mid = 32 \quad \mid A \mid = -4 \quad Tr(A) = -3.$$

Possiamo subito affermare che la nostra conica è una iperbole, in quanto $|B| \neq 0 \Longrightarrow$ che è irriducibile e $|A| < 0 \Longrightarrow$ che la conica è una iperbole. Il suo centro di simmetria si determina dal sistema: $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$

Quindi il centro di simmetria $C = (0,0)$ e coincide con l'origine delle coordinate. Cerchiamo adesso i punti impropri della nostra iperbole. Scriviamo l'equazione in coordinate omogenee: $4xy - 3y^2 = 8t^2$. Ponendo $t = 0$ si ha: $y(4x - 3y) = 0$. Quindi i due punti impropri hanno coordinte $(1,0,0)$ e $(3,4,0)$.
Gli asintoti dell'iperbole sono le rette congiungenti il centro coi due punti impropri e sono le rette: $y = 0$ e $y = 4/3x$.
Tenuto conto di quanto detto nella teoria, Γ sarà del I) tipo, cioè $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$, dove α e β sono gli autovalori della matrice A e γ si deduce col ragionamento che segue.

Gli invarianti in questo caso sono:

$$B' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\mid B' \mid = -\alpha\beta\gamma \qquad \mid A' \mid = \alpha\beta \quad Tr(A') = \alpha + \beta.$$

Ma noi sappiamo che:

$$\mid B \mid = \mid B' \mid; \quad \mid A \mid = \mid A' \mid; \quad Tr(A) = Tr(A').$$

Allora segue: $\alpha\beta\gamma = -32$; $\alpha\beta = -4$. Immediatamente si ha : $\gamma = 8$.
Ricordando che α e β sono gli autovalori di A, consideriamo la matrice caratteristica

$$(A - TI) = \begin{pmatrix} -T & 2 \\ 2 & -3 - T \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $\mid A - TI \mid = T^2 + 3T - 4 = 0$, che ammette le coppie di radici:

$$\begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4. \end{cases}$$

A questo punto lo studente si chiede quale coppia di soluzioni dovrà prendere? Ciò dipende unicamente dalle nostre scelte.
Più precisamente, scegliamo, per esempio, la coppia $\begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 1 \end{cases}$, ed allora l'equazione canonica sarà: $-\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{8} = 1$. Gli autospazi associati a $\alpha = -4$ e $\beta = 1$ sono rispettivamente: $4x + 2y = 0$ e $-x + 2y = 0$, che sono anche gli assi di simmetria, visto che in questo esempio, non è stato necessario

fare la traslazione. A questo punto dobbiamo determinare il cambiamento di coordinate che ha portato alla precedente forma canonica. A tale scopo prendiamo due autovettori sul primo e secondo autospazio, e siano rispettivamente: $(1, -2)$ e $(2, 1)$. Per rendere tali autovettori dei versori bisogna dividere le loro componenti per $\pm$ la loro norma. Il doppio segno dipende dai due possibili orientamenti che si possono prendere sugli assi. Orientiamo l'asse $\vec{X}$, scegliendo il versore $\mathbf{I}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$. La scelta del segno per individuare il secondo versore $\mathbf{J}$ è automatica; il segno dovrà essere preso in modo che il determinante della matrice P del cambio di base sia $+1$, se vogliamo che $(\mathbf{I},\mathbf{J})$ sia una coppia antioraria.
Quindi la matrice della rotazione è:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\mathbf{I} & \quad\mathbf{J} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Le formule del cambiamento di coordinate sono:

$$\underline{x} = P\underline{X} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y \end{cases} \qquad (*)$$

Chiaramente l'asse focale è l'asse $\vec{Y}$. Essendo nel nostro caso $c = \sqrt{2+8} = \sqrt{10}$, i due fuochi, nel riferimento $(\vec{X}, \vec{Y})$, hanno coordinate: $F_1 = (0, -\sqrt{10})$ e $F_2 = (0, \sqrt{10})$.
Se si vogliono trovare le coordinate dei fuochi nel riferimento $(\vec{x}, \vec{y})$ basta usare le formule di passaggio $(*)$. Si ottiene facilmente:

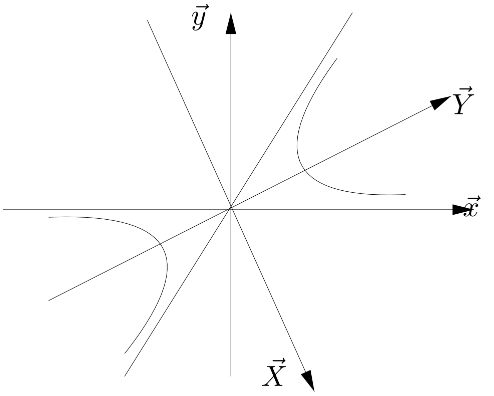
$$\begin{cases} x_{F_1} = -2\sqrt{2} \\ y_{F_1} = -\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{F_2} = 2\sqrt{2} \\ y_{F_2} = \sqrt{2} \end{cases} \quad .$$

Nel nostro caso l'eccentricità è $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.
A volte è utile conoscere le formule inverse delle $(*)$. Tenendo conto che il determinante dei coefficienti delle $\vec{X}, \vec{Y}$ è 1, applicando la regola di Cramer

si ha:

$$\begin{cases} X = \begin{vmatrix} x & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \\ Y = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & x \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & y \end{vmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ Y = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases} \qquad (**)$$

Dalle $(**)$ è facile dedurre le equazioni delle direttrici, nel primo sistema di coordinate $(\vec{x}, \vec{y})$. Nel nostro caso le direttrici hanno equazioni: $Y = \pm\frac{b^2}{c}$, cioè $Y = \pm\frac{8}{\sqrt{10}}$.
Utilizzando le $(**)$ si hanno le due equazioni: $\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y = \pm\frac{8}{\sqrt{10}}$.
Il grafico della nostra iperbole è il seguente:



Esempio 25 *Studiare la conica di equazione*

$$13x^2 + 13y^2 - 10xy + 36x - 36y - 36 = 0,$$

trovando i suoi fuochi, l'eccentricità, una sua forma canonica e il cambiamento di coordinate che la determina.

In tale esempio i calcoli non vengono fatti in dettaglio. Ciò che conta è il modo di procedere. Innanzitutto si trovano gli invarianti:

$$B = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 18 \\ -5 & 13 & -18 \\ 18 & -18 & -36 \end{pmatrix} \quad |B| = -2^7 \cdot 3^4 \quad A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} \quad |A| = 2^4 \cdot 3^2.$$

Poiché $|B| \neq 0$ la nostra conica è irriducibile. Inoltre da $|A| > 0$ segue che la conica è una ellisse. La sua forma canonica sarà del tipo: $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$. Per determinare γ facciamo uso degli invarianti come abbiamo fatto nell'esempio precedente. Si ha: $-\alpha\beta\gamma = -2^7 \cdot 3^4$, $\alpha\beta = 2^4 \cdot 3^2$ da cui si deduce $\gamma = 72$. Come sappiamo α e β sono gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$. La matrice caratteristica è $(\, A - TI \,) = \begin{pmatrix} 13 - T & -5 \\ -5 & 13 - T \end{pmatrix}$, ed il polinomio caratteristico è $(13-T)^2 - 25 = 0$. Gli autovalori sono allora $T = 8;\ T = 18$.
A questo punto si ha la doppia possibilità di scelta:

$$\begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = 18 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \alpha = 18 \\ \beta = 8. \end{cases}$$

Operiamo la scelta $\begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = 18 \end{cases}$ per cui l'equazione canonica è:
$8X^2 + 18Y^2 = 72$ che da' luogo a: $\dfrac{X^2}{9} + \dfrac{Y^2}{4} = 1$.
È facile calcolare il centro di simmetria della conica dal sistema:

$$\begin{cases} 13x - 5y + 18 = 0 \\ -5x + 13y - 18 = 0, \end{cases} \qquad \text{che risolto dà} : C = (-1, 1).$$

L'autospazio associato all' autovalore $\alpha = 8$ è: $x - y = 0$, mentre quello associato a $\beta = 18$ è: $x + y = 0$. Se ne deduce che gli assi di simmetria, che sono le rette per il centro parallele agli autospazi, sono rispettivamente le rette di equazioni: $x - y + 2 = 0$ e $x + y = 0$.
Adesso si devono trovare i versori che individuano il nuovo riferimento $(\vec{X}, \vec{Y})$. Per fare ciò troviamo sui due autospazi due versori ($\mathbf{I}$,$\mathbf{J}$) che diano una base ortonormale antioraria. L'autospazio relativo ad $\alpha = 8$ è $x - y = 0$. Prendiamo su di esso l'autovettore $(1, 1)$. Rendiamolo un versore dividendo per $\pm$ la sua norma che è $\sqrt{2}$. Il doppio segno equivale ai due possibili

modi di orientare l'asse $\vec{X}$. A questo punto operiamo la nostra scelta, prendendo come versore $\mathbf{I}= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Sull'autospazio associato all'autovalore $\beta = 18$, che ha equazione $x + y = 0$, prendiamo l'autovettore $(1, -1)$; normalizziamo tale autovettore dividendo per $\pm$ la sua norma. Si ottengono due versori, corrispondenti ai due modi di orientare l'asse $\vec{Y}$. Dopo la scelta fatta del primo versore, adesso la scelta del segno è obbligata, se vogliamo che il sistema $(\vec{X}, \vec{Y})$ sia antiorario. Precisamente deve accadere che la matrice della rotazione P abbia $det(P) = 1$. Quindi si ottiene la matrice della rototraslazione:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi le formule del cambiamento di coordinate sono:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) - 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) + 1 \end{cases} \qquad (*).$$

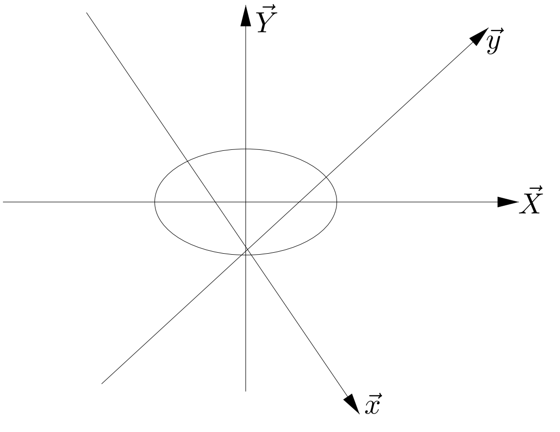
L'equazione canonica è $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$. L'asse focale è l'asse $\vec{X}$. Il valore di c che si deduce dall'equazioni canoniche è $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$ e i due fuochi F_1 ed F_2 hanno coordinate date da $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$. L'eccentricità è $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Le coordinate dei fuochi, nel primitivo sistema di riferimento sono date da:

$$\begin{cases} x_{F_1} = -\sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \\ y_{F_1} = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{F_2} = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \\ y_{F_2} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1 \end{cases}$$

Le direttrici hanno equazioni $X = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$. Se vogliamo le equazioni delle direttrici nel primo sistema di riferimento dobbiamo ricavare le formule inverse delle $(*)$. Un calcolo immediato prova che

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y \\ Y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y - \dfrac{2}{\sqrt{2}} \end{cases} .$$

Ne segue che le equazioni delle direttrici nel primo sistema di riferimento sono $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$.
A questo punto non ci resta che tracciare il grafico della nostra ellisse.



Esempio 26 *Studiare la conica di equazione:*

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4y = 0.$$

Determinare una sua forma canonica e il cambiamento di coordinate che la determina.

Cominciamo come al solito col trovare gli invarianti della conica.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |B| = -4 \quad |A| = 0.$$

Quindi la conica è irriducibile in quanto $|B| \neq 0$ ed è una parabola perché $|A| = 0$. La matrice caratteristica è:

$$(A - TI) = \begin{pmatrix} 1-T & 1 \\ 1 & 1-T \end{pmatrix}; \text{ e il polinomio caratteristico } (1-T)^2 = 1.$$

Quindi gli autovalori sono $\alpha = 0$, e $\beta = 2$. Nel nostro caso la conica viene del tipo II), cioè $\beta Y^2 = 2\gamma X$. Ed allora $|B'| = -\beta\gamma^2 = -4$, da cui si deduce che $\gamma = \pm\sqrt{2}$. A questo punto si deve fare la scelta del segno. Questa volta si opera come segue. Innanzitutto sappiamo che l'asse di simmetria è parallelo all'autospazio associato all'autovalore nullo; tale autospazio ha equazione $x + y = 0$ e il suo punto improprio $(1, -1, 0)$ è il punto improprio della parabola. Per trovare l'asse di simmetria si può calcolare il diametro polare del punto improprio in direzione ortogonale a quello della parabola, cioè il punto di coordinate omogenee: $(1, 1, 0)$. Un semplice calcolo prova che tale asse è la retta di equazione $x + y - 1 = 0$. Facendo sistema tra l'equazione della parabola e quella dell'asse di simmetria si trova il vertice; segue subito che il vertice è $V = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Adesso si deve trovare la matrice della rototraslazione che permette di ridurre l'equazione data in forma canonica. Cerchiamo due autovettori associati ad $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, e siano rispettivamente: $(1, -1)$ e $(1, 1)$. Per trovare i versori degli assi $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ dobbiamo dividere per $\pm$ la loro norma. Scegliamo l'orientamento sul primo asse, con la scelta del versore $\mathbf{I}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; come sappiamo la scelta del versore $\mathbf{J}$ è automatica, dovendo risultare il determinante della matrice della rotazione P uguale a $+1$. Ne segue che il versore $\mathbf{J}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Nel caso delle parabole c'è una situazione differente rispetto ai casi considerati negli esempi precedenti. Precisamente, per determinare il segno di γ, bisogna capire come è posizionata la parabola data. Non è difficile individuarne la sua posizione, rispetto al riferimento dato, per esempio intersecando la parabola con gli assi coordinati $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Nel caso considerato è facile dedurre che la parabola giace nel semipiano delle y positive. Ed allora, tenuto conto della scelta dell'orientamento degli assi la sua equazione canonica dovrà essere del tipo $2Y^2 = -2\sqrt{2}X$. Quindi la scelta del segno di γ si effettua mediante il ragionamento complessivo fatto.

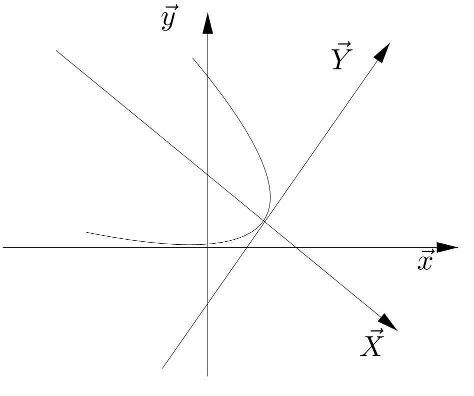
A questo punto è facile scrivere la matrice della rototraslazione Q.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le formule del cambiamento di coordinate sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) + \dfrac{3}{4} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) + \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad (*)$$

Il fuoco e la relativa direttrice nel nuovo riferimento sono: $F = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$ e $X = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Utilizzando le $(*)$ si possono trovare le coordinate del fuoco nel sistema di riferimento dato. Si ottiene: $F = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Un facile calcolo mostra che l'equazione della direttrice è: $x - y = 1$. Completiamo lo studio mostrando il grafico della nostra parabola.



Capitolo 5

Le Quadriche

5.1 Generalità sulle quadriche

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$. Si consideri una equazione omogenea di secondo grado nelle variabili x, y, z, t, a coefficienti numeri reali. La più generale di tali equazioni si può scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) \equiv\ & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + a_{22}y^2 + \\ & + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + a_{33}z^2 + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Definizione 18 *Diremo* **quadrica** *il luogo dei punti P dello spazio propri o impropri, reali o immaginari che con le loro coordinate omogenee (x, y, z, t) soddisfano una equazione del tipo* (5.1).

Osservazione 14 *Se la forma quadratica $f(x, y, z, t)$ è il quadrato di una forma lineare $ax + by + cz + dt$, allora la quadrica è data dai punti del piano $ax + by + cz + dt = 0$ ciascuno contato due volte.*

Se di una quadrica interessano soltanto i suoi punti propri la sua equazione si può scrivere in coordinate non omogenee:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,1) \equiv\ & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + a_{22}y^2 + \\ & + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Talvolta l'equazione della quadrica si suole scrivere nella forma:

$$f(x, y, z, 1) \equiv \phi_2(x, y, z) + \phi_1(x, y, z) + \phi_0 = 0$$

dove $\phi_j(x, y, z)$ indica il complesso dei termini di grado j nelle variabili x, y, z.

In analogia a quanto fatto per le coniche anche per le quadriche si introducono le seguenti entità:

1. La matrice 4×4 simmetrica $B = (a_{ij})$ associata alla forma quadratica $f(x, y, z, t)$.

2. La sottomatrice A associata alla forma quadratica $\phi_2(x, y, z)$.

3. I determinanti $|B|$, $|A|$, il rango di B, gli autovalori di A e la traccia di A.

Se, come al solito, si indica con $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ il vettore colonna delle variabili, allora l'equazione della nostra quadrica si può scrivere in forma matriciale nel modo seguente:

$$^t\underline{x}B\underline{x} = 0 \tag{5.3}$$

Definizione 19 *Se il primo membro dell'equazione* (5.1) *si spezza nel prodotto di due fattori lineari nelle variabili x, y, z, t, distinti o no, allora la quadrica si dice* **riducibile** *o* **spezzata** *ed i suoi punti sono quelli dei due piani in cui si spezza.*
In caso contrario la quadrica si dice **irriducibile**.

5.2 Riduzione di una quadrica a forma canonica

Per studiare una quadrica si adotta un procedimento di **riduzione a forma canonica**, che consiste nell' individuare una opportuna **rototraslazione** che cambia il sistema ortogonale antiorario $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ in un altro sistema $O'\vec{I}\vec{J}\vec{K}$, anch'esso ortogonale antiorario, rispetto a cui l'equazione (5.2) assuma una delle seguenti due forme:

$$I)\ \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = \delta \quad \text{oppure} \quad II)\ \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 2\delta X$$

che si potranno rendere omogenee quando questo occorra.

Cominciamo col considerare $\phi_2(x, y, z)$, cioè la parte omogenea di secondo grado nelle variabili x, y, z. Sappiamo che $\phi_2(x, y, z)$ è una forma quadratica reale e, per il Teorema Spettrale, può essere ridotta in una forma canonica del tipo:

$$\alpha X'^2 + \beta Y'^2 + \gamma Z'^2$$

Si opera in modo del tutto simile a quanto fatto per le coniche. Si trovano gli autovalori α, β, γ della matrice A, poi degli autovettori ad essi associati, quindi si normalizzano questi in modo da ottenere dei versori I', J', K'. Si orientano i versori in modo che la rotazione sia antioraria, cioè $det(P) = 1$, dove come al solito P indica la matrice del cambio di base.
A questo punto si opera una traslazione, con gli stessi metodi e intendimenti usati nel caso delle coniche.
Non sviluppiamo i calcoli, ma in ogni caso si perviene sempre a quadriche la cui equazione è del tipo $I)$ o $II)$.

5.2.1 Invarianti ortogonali

Supponiamo che la data quadrica $\mathcal{Q}$ abbia equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$, rispetto al riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u.$ Nel modo sopra descritto si opera una rototraslazione, la cui matrice è del tipo:

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & a \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & b \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove le prime tre righe e colonne danno la matrice P della rotazione, mentre (a, b, c) sono le coordinate della nuova origine O' del sistema di riferimento $O'\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}.u.$ Il legame tra le vecchie e le nuove coordinate è dato da:

$$\underline{x} = Q\underline{X} \tag{5.4}$$

Operando il cambiamento di coordinate dato dalle (5.4), sostituendo nell'equazione data si ha:

$${}^t\underline{X}{}^tQBQ\underline{X} = 0 \tag{5.5}$$

che è l'equazione della quadrica in una delle due forme I) oppure II).
Sussiste il seguente teorema di cui omettiamo i dettagli della dimostrazione.

Teorema 8 *Data una quadrica $\mathcal{Q}$ a coefficienti reali di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$ è sempre possibile operare una rototraslazione, di matrice Q, tale che $\mathcal{Q}$ nel nuovo riferimento $O'\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}.u$ abbia una delle seguenti due forme:*

$$I) \quad \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = \delta \quad \textit{oppure} \quad II) \quad \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 2\delta X.$$

Inoltre dette B ed A la matrice della quadrica e la sottomatrice dei termini di secondo grado in x, y e z e rispettivamente B' e A' le corrispondenti matrici per la quadrica in forma ridotta si ha:

a) B e B' hanno lo stesso determinante e lo stesso rango.

b) A e A' sono simili e hanno quindi gli stessi autovalori, lo stesso determinante e la stessa traccia.

Definizione 20 *I numeri $det(B), det(A), \rho(B), tr(A)$ si dicono* **invarianti ortogonali***, in quanto si mantengono inalterati dopo una rototraslazione.*

5.3 Intersezioni di quadriche con rette e piani

Cominciamo il paragrafo con la seguente considerazione. Una retta incontra una quadrica in *due punti*, reali e distinti, reali e coincidenti, immaginari e coniugati oppure la retta *giace sulla quadrica*.

Infatti, sia data una quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione matriciale ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$ e la retta P_0P_1 di equazioni parametriche scalari omogenee:

$$\begin{cases} x = \lambda x_0 + \mu x_1 \\ y = \lambda y_0 + \mu y_1 \\ z = \lambda z_0 + \mu z_1 \\ t = \lambda t_0 + \mu t_1 \end{cases}$$

dove (x_0, y_0, z_0, t_0), e (x_1, y_1, z_1, t_1) sono rispettivamente le coordinate di P_0 e P_1. Le precedenti in modo compatto si possono scrivere: $\underline{x} = \lambda\underline{x}_0 + \mu\underline{x}_1$. Facendo sistema tra la retta e la quadrica si ottiene la risolvente:

$$^t(\lambda\underline{x}_0 + \mu\underline{x}_1)B(\lambda\underline{x}_0 + \mu\underline{x}_1) = 0 \tag{5.6}$$

Effettuando i prodotti tra matrici e tenendo conto che ${}^t\underline{x}_1B\underline{x}_0$ è una matrice 1×1, e quindi coincide con la sua trasposta ${}^t\underline{x}_0B\underline{x}_1$, la risolvente si può scrivere nella forma:

$$\lambda^2({}^t\underline{x}_0\, B\underline{x}_0) + 2\lambda\mu({}^t\underline{x}_0 B\underline{x}_1) + \mu^2({}^t\underline{x}_1 B\underline{x}_1) = 0 \tag{5.7}$$

La precedente eguaglianza (5.7) o è una equazione omogenea di secondo grado in λ e μ, e come tale ammette nel rapporto $\dfrac{\lambda}{\mu}$ o $\dfrac{\mu}{\lambda}$ due radici nel campo complesso, oppure è una identità rispetto a λ e μ.

Secando una quadrica $\mathcal{Q}$ con un piano proprio π si ottiene *generalmente* una conica dello spazio. Ciò si può dedurre nel seguente modo: se la quadrica $\mathcal{Q}$ ha equazione $f(x, y, z, t) = 0$ e il piano π ha equazione: $ax+by+cz+dt = 0$ è sempre possibile operare un cambiamento di coordinate in modo che il piano π nel nuovo riferimento sia uno dei piani coordinati, per esempio il piano $Z = 0$. Allora i punti comuni al piano e alla quadrica si esprimono mediante il sistema

$$\begin{cases} \phi(X, Y, Z, T) = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

che in modo più esplicito si può scrivere

$$\begin{cases} aX^2 + bXY + cXT + dY^2 + eYT + fT^2 = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

Chiaramente la prima equazione del precedente sistema è l'equazione di una conica del piano $Z = 0$. L'unica eccezione si ha quando si seca una quadrica spezzata in due piani con uno dei due piani che la costituiscono. In tal caso la prima equazione del sistema diventa una identità.

Convenzione 3 *Useremo la convenzione di indicare una conica* Γ *intersezione di una quadrica* $\mathcal{Q}$ *e di un piano* π*, come* $\Gamma = \mathcal{Q} \cap \pi$ *e nello stesso tempo indicheremo le sue equazioni* $\mathcal{Q} = 0$*;* $\pi = 0$*.*

Per il seguito è molto importante quanto segue. Per una quadrica $\mathcal{Q}$, non contenente come parte il piano improprio, i suoi punti impropri si ottengono secandola col piano improprio; il luogo ottenuto si suole chiamare la **conica all'infinito** della quadrica. Essa si indica C_∞ e le sue equazioni sono date dal sistema formato dall'equazione della quadrica, in coordinate omogenee, e dall'equazione del piano improprio $t = 0$. Se ne deduce che pensando la C_∞ come conica del piano $t = 0$, la sua matrice è data proprio dalla sottomatrice

A della quadrica. Per cui la C_∞ è irriducibile se e solo se $det(A) \neq 0$.

Chiaramente per la C_∞ di una quadrica ci si chiede solo se è irriducibile o meno, mentre ovviamente non ha senso chiedersi se essa è una parabola, ellisse o iperbole, visto che essa è costituita tutta da punti impropri.

Sia data una conica Γ di equazioni $\mathcal{Q} = 0;\ \pi = 0$ e supponiamo che tale conica sia irriducibile. Per stabilire la natura di tale conica bisogna vedere se i suoi punti impropri sono reali e distinti, reali e coincidenti oppure immaginari e coniugati. A tale scopo si scrivono le equazioni della conica in coordinate omogenee e si fa sistema col piano improprio $t = 0$. È ovvio che tale sistema dà anche i punti comuni alla C_∞ della quadrica $\mathcal{Q}$ e alla retta impropria del piano secante π. Infatti i punti impropri della conica Γ si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} \mathcal{Q} = 0 \\ \pi = 0 \\ t = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Tale sistema ovviamente fornisce i punti comuni alla C_∞: $\mathcal{Q} = 0;\ t = 0$ e alla retta impropria del piano secante π che è data da $\pi = 0;\ t = 0$. Questa osservazione si rivela particolarmente utile nello studio delle sezioni piane delle quadriche.

5.4 Vertici delle quadriche

Diamo adesso la seguente

Definizione 21 *Un punto P_0 di una quadrica $\mathcal{Q}$ si dice che è un* **vertice** *per $\mathcal{Q}$ se la retta P_0P che congiunge P_0 con un* qualunque *altro punto P della quadrica giace sulla quadrica.*

1. Chiaramente se una quadrica è spezzata in due piani coincidenti allora tutti i suoi punti sono vertici.

2. Se una quadrica è spezzata in due piani distinti allora la retta intersezione dei due piani è il luogo dei suoi vertici.

Per quanto riguarda i vertici di una quadrica vale il seguente

Teorema 9 *Se una quadrica $\mathcal{Q}$ ha più di un vertice allora è spezzata e quindi ha infiniti vertici.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\mathcal{Q}$ abbia due vertici distinti P_0 e P_0'. Detto P un qualunque altro punto di $\mathcal{Q}$, per la proprietà dei vertici, la retta $P_0'P$ appartiene alla quadrica. Per la stessa proprietà tutte le congiungenti P_0 con i punti della retta $P_0'P$ devono appartenere alla quadrica; ma tali rette descrivono un piano che, per quanto detto, è contenuto nella quadrica, la quale è quindi spezzata. $\square$

In definitiva o una quadrica è spezzata ed ha infiniti vertici, oppure è irriducibile; in tal caso o è priva di vertici oppure ha un solo vertice.

5.4.1 Ricerca dei vertici delle quadriche

Nella precedente sezione abbiamo dato la definizione di vertice di una quadrica. Adesso vogliamo determinare tutti i vertici di una quadrica, supposto che ne abbia. A tale scopo dimostriamo il seguente

Teorema 10 *Data la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$. Il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$, è vertice per $\mathcal{Q}$ se e solo se $\underline{x}_0$ è soluzione del sistema lineare omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$. Con $\underline{x}_0$ si denota il vettore colonna delle coordinate di P_0 e con $\underline{0}$ il vettore colonna costituito da zeri.*

DIMOSTRAZIONE. Se $P_0 \in \mathcal{Q}$ è vertice per $\mathcal{Q}$, allora detto $P_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ un qualunque altro punto dello spazio, deve accadere

$$(\star) \quad {}^t\underline{x}_0 B\underline{x}_1 = 0, \text{per ogni} \underline{x}_1.$$

Infatti, in tal caso la retta P_0P_1 o giace sulla quadrica $\mathcal{Q}$ oppure incontra $\mathcal{Q}$ in due punti coincidenti in P_0. Ciò perché, se P_0P_1 incontra $\mathcal{Q}$ in un punto $P_2 \neq P_0$, per la proprietà dei vertici, tutta la retta deve giacere su $\mathcal{Q}$. Quindi la risolvente il sistema retta-quadrica

$$\lambda^2 \left({}^t\underline{x}_0 B\underline{x}_0\right) + 2\lambda\mu \left({}^t\underline{x}_0 B\underline{x}_1\right) + \mu^2 \left({}^t\underline{x}_1 B\underline{x}_1\right) = 0 \tag{5.9}$$

deve essere una identità, rispetto a λ e μ, oppure deve avere la soluzione $\mu^2 = 0$. In ogni caso si ha ${}^t\underline{x}_0 B\underline{x}_1 = 0$, da cui la tesi.
Viceversa se il punto P_0 con le sue coordinate soddisfa il sistema $B\underline{x} = \underline{0}$, allora ${}^t\underline{x}_0 B\underline{x}_0 = 0$, ${}^t\underline{x}_0 B\underline{x}_1 = 0$ e quindi il punto $P_0 \in \mathcal{Q}$ è tale che congiunto con un qualunque punto $P_1 \in \mathcal{Q}$ dà luogo ad una retta giacente sulla quadrica perché la risolvente (5.9) è una identità. $\square$

Definizione 22 *Una quadrica priva di vertici si dice* **non degenere***.*
Se una quadrica ha vertici si dice **degenere***.*
Una quadrica con un solo vertice si dice **cono***, se esso è* proprio*.*
Una quadrica con un solo vertice si dice **cilindro***, se esso è* improprio*.*

Osserviamo che coni e cilindri sono quadriche *degeneri* irriducibili.

5.5 Classificazione delle quadriche degeneri

Dal fatto che i vertici della quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$ sono tutti e soli i punti le cui coordinate sono soluzioni del sistema $B\underline{x} = 0$ segue il

Teorema 11 *Data una quadrica $\mathcal{Q}$, condizione necessaria e sufficiente perché:*

a) $\mathcal{Q}$ sia spezzata in due piani coincidenti è che $\rho(B) = 1$.

b) $\mathcal{Q}$ sia spezzata in due piani distinti è che $\rho(B) = 2$.

c) $\mathcal{Q}$ sia un cono o cilindro *è che $\rho(B) = 3$.*

d) $\mathcal{Q}$ sia non degenere *è che $\rho(B) = 4$.*

Dimostriamo adesso il seguente

Teorema 12 *Sia $\mathcal{Q}$ un cono o cilindro.Tutti e soli i piani che secano $\mathcal{Q}$ in una conica spezzata sono quelli passanti per il vertice.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{Q}$ un cono o cilindro di vertice V. La conica sezione $\Gamma = \mathcal{Q} \cap \pi$ ottenuta secando $\mathcal{Q}$ col piano π per il vertice V è spezzata. Infatti, detto P un qualunque punto di tale conica, la retta VP giace su π perché congiunge due punti di π e appartiene alla quadrica per la proprietà del vertice V. Quindi la conica sezione contenendo tale retta è spezzata.
Viceversa, se il piano π seca la quadrica $\mathcal{Q}$ in una conica spezzata in due rette r ed s, tale piano deve contenere V, anzi V deve stare su entrambe le rette r ed s. Se V non appartenesse ad r, tutte le rette che congiungono V con i punti di r apparterrebbero alla quadrica, per la proprietà del vertice V; ma allora $\mathcal{Q}$, contenendo il piano individuato da V e da r, sarebbe spezzata contro l'ipotesi. Analogamente se V non appartenesse a s. Quindi V deve necessariamente appartenere ad entrambe le rette. $\square$

Dal precedente Teorema si deduce che la C_∞ di un cono è irriducibile, mentre quella di un cilindro è spezzata.

Corollario 6 *In uno stesso cono reale ci sono sezioni piane che sono iperboli, parabole o ellissi. In uno stesso cilindro le sezioni piane fatte con piani propri, reali e non passanti per il vertice sono coniche tutte di uno stesso tipo.*

DIMOSTRAZIONE. Tutto dipende dal fatto che in un cono la C_∞ è irriducibile e quindi al variare del piano secante π la retta impropria di tale piano può incontrare la C_∞ in due punti reali e distinti, reali e coincidenti o immaginari e coniugati. Poiché la C_∞ di un cilindro è spezzata in due rette, la natura delle sezioni piane dipende essenzialmente dal modo in cui si spezza la C_∞. Se la C_∞ si spezza in due rette reali e distinte, al variare del piano π, purchè non passi per il vertice, la retta impropria del piano secante incontra la C_∞ sempre in due punti reali e distinti e le sezioni sono tutte iperboli. Se la C_∞ si spezza in due rette reali e coincidenti allora le sezioni piane sono tutte parabole, se la C_∞ si spezza in due rette immaginarie e coniugate allora le sezioni piane sono tutte ellissi. □

Quanto precede permette di dare la seguente classificazione dei cilindri:

un cilindro si dice ...	se la C_∞	è spezzata in due rette ...
iperbolico		reali e distinte
parabolico		reali e coincidenti
ellittico		immaginarie e coniugate

5.6 Classificazione delle quadriche non degeneri

Una quadrica $\mathcal{Q}$ è non degenere se il rango della sua matrice B è massimo, cioè $\rho(B) = 4$. Riferendoci quindi alle equazioni canoniche dei due tipi I) e II) si vede che tutti i coefficienti che vi figurano devono essere non nulli. Se ne deduce che le quadriche del I) tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = \delta$, che si possono anche scrivere $\frac{X^2}{\frac{\delta}{\alpha}} + \frac{Y^2}{\frac{\delta}{\beta}} + \frac{Z^2}{\frac{\delta}{\gamma}} = 1$, producono, a meno del cambio del nome degli assi e a secondo del rapporto dei segni fra $\alpha, \beta, \gamma,$ e δ,

1. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$

2. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$

3. $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$

4. $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$

Mentre le quadriche del secondo tipo: $\beta Y^2 + \gamma Z^2 = 2\delta X$, che si possono scrivere anche: $\dfrac{Y^2}{\frac{\delta}{\beta}} + \dfrac{Z^2}{\frac{\delta}{\gamma}} = 2X$, producono a meno del cambio del nome degli assi

1. $\dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = -2X$

2. $\dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 2X$

3. $\dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 2X$

Le quadriche del primo gruppo hanno la C_∞ irriducibile, mentre quelle del secondo gruppo hanno la C_∞ riducibile. Inoltre le quadriche 1. e 2. del primo gruppo hanno la C_∞ priva di punti reali, mentre per le altre la C_∞ ha punti reali. In base a questi elementi si dà la seguente classificazione delle quadriche non degeneri.

Una quadrica non degenere, quindi tale che $det(B) \neq 0$ si dice:

1. **ellissoide** se la C_∞ è irriducibile ed è priva di punti reali.

2. **iperboloide** se la C_∞ è irriducibile ma ha dei punti reali.

3. **paraboloide** se la C_∞ è spezzata.

Ciò si può sintetizzare nella seguente tabella:

Una quadrica non deg. è ...	se la C_∞ è ...	e $det(A)$ è ...
ellissoide	irrid. e senza punti reali	$det(A) \neq 0$
iperboloide	irrid. e con punti reali	$det(A) \neq 0$
paraboloide	spezzata	$det(A) = 0$

Come si vede dalla precedente tabella gli ellissoidi e gli iperboloidi hanno $det(B) \neq 0$ e $det(A) \neq 0$. La differenza fra i due tipi di quadriche consiste nel fatto che gli ellissoidi hanno la C_∞ irriducibile e priva di punti reali, mentre per gli iperboloidi la C_∞ è irriducibile ma è dotata di punti reali. Ne segue che perché una quadrica sia un ellissoide deve accadere che gli autovalori α, β, γ siano tutti dello stesso segno. Quindi per distinguere gli ellissoidi dagli iperboloidi si deve studiare il *segno della forma quadratica* $\phi_2(x, y, z)$, con uno qualunque dei metodi studiati. Per esempio basta considerare l'equazione caratteristica $|A - TI| = 0$. Poiché tale equazione è di terzo grado non sempre è facile calcolare esplicitamente gli autovalori. Di fatto però a noi interessano i segni di tali autovalori; quindi è sufficiente applicare la regola di Cartesio "generalizzata", per cui ad ogni variazione di segno fra due coefficienti consecutivi del polinomio caratteristico corrisponde una radice positiva, mentre ad una permanenza corrisponde una radice negativa. Quindi

Proposizione 19 *Condizione necessaria e sufficiente perché una quadrica non degenere con det$(A) \neq 0$ sia un ellissoide è che il polinomio caratteristico abbia i coefficienti tutti dello stesso segno, oppure a segni alternati.*

5.7 Centro e piani di simmetria di una quadrica

Sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$. Perché una data quadrica $\mathcal{Q}$, non degenere, di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$ abbia l'origine O del riferimento come centro di simmetria deve accadere che l'equazione non contenga termini di primo grado in x, y, e z, in modo che se la quadrica contiene il punto di coordinate (α, β, γ), conterrà anche il suo simmetrico rispetto all'origine che ha coordinate $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$.

Cerchiamo adesso le condizioni perché la quadrica abbia centro di simmetria in un punto $O' = (a, b, c)$. Deve accadere che facendo una traslazione nel punto O', la quadrica nel nuovo riferimento $O'\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}.u$ sia mancante dei termini di primo grado in X, Y, Z.

La matrice del cambio di coordinate, in questo caso, è la matrice della traslazione:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le formule della traslazione sono date da:

$$\underline{x} = Q\underline{X}$$

Facendo il cambio di coordinate dato dalle precedenti, l'equazione della quadrica $\mathcal{Q}$, nel nuovo riferimento $O'\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}.u$ si può scrivere nella forma:

$$^t\underline{X}^tQBQ\underline{X} = 0$$

dove $^tQBQ = B'$ è la matrice di $\mathcal{Q}$ nel nuovo riferimento. A noi interessano i coefficienti $a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}$ di X, Y e Z. È facile vedere che tali coefficienti si possono ottenere prendendo le prime tre componenti del vettore:

$$(0,\, 0,\, 0,\, 1) \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{pmatrix} = (a'_{14},\, a'_{24},\, a'_{34},\, -)$$

Sostituendo a B' il suo valore si ha:

$$(a'_{14},\, a'_{24},\, a'_{34},\, -) = (0,\, 0,\, 0,\, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il risultato di tale prodotto è un vettore 1×4 le cui prime tre componenti sono date da:

$$(a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c + a_{14}, a_{12}a + a_{22}b + a_{23}c + a_{24}, a_{13}a + a_{23}b + a_{33}c + a_{34}, -)$$

Se ne deduce che il punto $O' = (a, b, c)$ è **centro di simmetria** per la quadrica $\mathcal{Q}$ se con le sue coordinate soddisfa il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c + a_{14} = 0 \\ a_{12}a + a_{22}b + a_{23}c + a_{24} = 0 \\ a_{13}a + a_{23}b + a_{33}c + a_{34} = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

È immediato osservare che il sistema (5.10) ammette una e una sola soluzione quando la nostra quadrica è un ellissoide o un iperboloide. Infatti in tal caso $det(A) \neq 0$.

Se invece la nostra quadrica è un paraboloide, il precedente sistema non è risolubile in quanto il rango della matrice dei coefficienti è due, si tenga conto che $det(A) = 0$, mentre il rango della matrice completa del sistema è tre.

Per ellissoidi e iperboloidi, in analogia a quanto fatto per le coniche, si può affermare che i piani di simmetria si ottengono prendendo piani per il centro di simmetria ortogonali agli autovettori della matrice A.

Per trovare i piani di simmetria di un paraboloide, il discorso è più complesso e quindi non viene affrontato nell'attuale contesto.

5.8 Rette e piani tangenti

Data una quadrica $\mathcal{Q}$, sia P_0 un suo punto, non vertice. Poniamo la seguente

Definizione 23 *Una retta r per P_0 si dice* **tangente** *alla quadrica $\mathcal{Q}$ nel punto P_0 se incontra $\mathcal{Q}$ in due intersezioni coincidenti in P_0 oppure giace sulla quadrica.*

Dimostriamo adesso l'importante

Teorema 13 *Tutte e sole le rette tangenti ad una quadrica $\mathcal{Q}$ in un suo punto P_0 giacciono su uno stesso piano.*

Dimostrazione. Sia ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$ l'equazione di $\mathcal{Q}$. Consideriamo una retta generica P_0P_1 per P_0. Come abbiamo visto in **5.3**, formula (5.7) la risolvente del sistema che dà i punti comuni alla retta e alla quadrica si può scrivere nella forma:

$$\lambda^2\,({}^t\underline{x}_0B\underline{x}_0) + 2\lambda\mu\,({}^t\underline{x}_0B\underline{x}_1) + \mu^2\,({}^t\underline{x}_1B\underline{x}_1) = 0 \tag{5.11}$$

Poiché $P_0 \in \mathcal{Q}$ allora ${}^t\underline{x}_0B\underline{x}_0 = 0$. Ne deriva che la retta P_0P_1 è tangente in P_0 se e solo se la retta ha due intersezioni coincidenti in P_0, ed in tal caso la risolvente deve ridursi a $\mu^2 = 0$, oppure la retta giace su $\mathcal{Q}$ ed in tal caso la risolvente dev'essere un'identità. La condizione comune ai due casi è ${}^t\underline{x}_0B\underline{x}_1 = 0$.

In definitiva perché una retta per P_0 sia tangente alla quadrica $\mathcal{Q}$ in P_0 è necessario e sufficiente congiungere P_0 con tutti i punti P_1 che con le loro coordinate soddisfano l'equazione:

$$ {}^t\underline{x}_0B\underline{x} = 0 \tag{5.12}$$

Se il punto P_0 non è vertice, come è stato posto per ipotesi, allora la precedente è l'equazione di un piano. Quindi le tangenti alla quadrica nel punto P_0 sono tutte e sole rette che giacciono su uno stesso piano. $\square$

Definizione 24 *Il piano che contiene tutte le tangenti alla quadrica nel punto P_0 si dice* **piano tangente** *alla quadrica in P_0 e la sua equazione è la precedente equazione (5.12).*

Osservazione 15 *È immediato osservare che se una quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$ passa per l'origine O del riferimento, l'equazione del piano tangente, supposto che O non sia vertice, si ottiene eguagliando a zero il complesso dei termini di primo grado nelle variabili x, y, z. Infatti l'equazione del piano tangente in O si ottiene da:*

$$(0,0,0,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che esplicitata, nel nostro caso, diventa:

$$\boxed{a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0}$$

5.8.1 Sezioni delle quadriche coi piani tangenti

Come abbiamo visto se P_0 è un punto, non vertice, di una quadrica $\mathcal{Q}$ allora esiste il piano tangente π_0 alla quadrica $\mathcal{Q}$ in P_0 e la sua equazione è data da ${}^t\underline{x}_0B\underline{x} = 0$.
Vogliamo adesso provare l'importante

Teorema 14 *Se si seca una quadrica irriducibile $\mathcal{Q}$ con il piano tangente π_0 in un punto P_0, non vertice, allora la conica sezione $\Gamma = \mathcal{Q} \cap \pi_0$ è spezzata. D'altra parte se un piano π seca una quadrica $\mathcal{Q}$ in una conica spezzata in due rette distinte r ed s e $T = r \cap s$ non è vertice allora π è tangente a $\mathcal{Q}$ in T; se π seca $\mathcal{Q}$ in una retta r contata due volte allora π è tangente a $\mathcal{Q}$ lungo tutti i punti di r che non sono vertici.*

Dimostrazione. Se $\overline{P}$ è un punto della conica sezione Γ, distinto da P_0, allora la retta $P_0\overline{P}$ sta sul piano π_0, quindi è tangente alla quadrica. Ma poiché passa per il punto $\overline{P}$ che è distinto da P_0 tale retta è una tangente che giace sulla quadrica. Ne segue che la conica sezione è spezzata.

D'altra parte se il piano π_0 seca $\mathcal{Q}$ in una conica spezzata in due rette distinte r ed s che si intersecano in un punto T non vertice, allora il piano π è tangente alla quadrica $\mathcal{Q}$ in T. Infatti, le due rette r ed s sono tangenti a $\mathcal{Q}$ in T e come sappiamo due tangenti distinte individuano il piano tangente.

Se invece il piano π seca $\mathcal{Q}$ in una conica spezzata nella retta r contata due volte, allora detto T un qualunque punto di r che non sia vertice, il piano π è tangente a $\mathcal{Q}$ in T. Se infatti s è una qualunque retta per T, distinta da r e giacente su π, essa è tangente a $\mathcal{Q}$ in T perché incontra $\mathcal{Q}$ in due punti coincidenti in T. Allora il piano è tangente in T alla quadrica perché contiene due rette tangenti distinte. $\square$

La dimostrazione del precedente Teorema 14 si può considerare "qualitativa", adesso facciamo una dimostrazione "analitica" dello stesso teorema, ma che fornisce più informazioni della precedente.

Teorema 15 *La conica sezione di una quadrica irriducibile $\mathcal{Q}$ di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$, con il piano tangente π_0 in un punto reale non vertice P_0 è spezzata in due rette:*

reali e distinte	*se e solo se*	$det(B) > 0$
immaginarie e coniugate	*se e solo se*	$det(B) < 0$
reali e coincidenti	*se e solo se*	$det(B) = 0.$

Dimostrazione. Se il punto P_0 è proprio è possibile fare un cambiamento di coordinate in modo che nel nuovo riferimento $O'\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$ il punto P_0 sia la nuova origine e il piano π_0 sia il piano coordinato $Z = 0$. Per quanto osservato nella sezione precedente, l'equazione della quadrica, nel nuovo riferimento, deve mancare del termine noto e deve avere il complesso $\phi_1(X, Y, Z)$ dei termini di primo grado del tipo $a'_{34}Z$, con $a'_{34} \neq 0$. Quindi l'equazione della quadrica deve assumere la forma seguente:

$$a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + 2a'_{13}XZ + a'_{22}Y^2 + 2a'_{23}YZ + a'_{33}Z^2 + 2a'_{34}Z = 0 \quad (5.13)$$

dove necessariamente il coefficiente $a'_{34} \neq 0$. Allora la sezione della nostra quadrica col piano tangente $Z = 0$ si può esprimere nella forma:

$$\begin{cases} Z = 0 \\ a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + a'_{22}Y^2 = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

La precedente è l'equazione di una conica del piano $Z = 0$ che si spezza in due rette:

1. reali e distinte, se $a'^2_{12} - a'_{11}a'_{22} > 0$.
2. reali e coincidenti, se $a'^2_{12} - a'_{11}a'_{22} = 0$.
3. immaginarie e coniugate, se $a'^2_{12} - a'_{11}a'_{22} < 0$.

La matrice B' della quadrica è data da:

$$B' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & 0 \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} & 0 \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante di B' si trova subito che:
$det(B') = a'^2_{34}(a'^2_{12} - a'_{11}a'_{22})$. A questo punto è immediato trarre le conclusioni del teorema, tenuto conto che $det(B') = det(B)$ è un invariante ortogonale.
In modo del tutto analogo si procede nel caso in cui il punto P_0 sia improprio.
□

Si pone la seguente:

Definizione 25 *Un punto* reale P_0 *di una quadrica reale irriducibile* $\mathcal{Q}$ *si dice che è un:*

punto iperbolico *se il piano tangente in esso seca* $\mathcal{Q}$ *in una conica spezzata in due rette reali e distinte.*

punto parabolico *se il piano tangente in esso seca la quadrica* $\mathcal{Q}$ *in una conica spezzata in due rette reali e coincidenti.*

punto ellittico *se il piano tangente in esso seca la quadrica* $\mathcal{Q}$ *in una conica spezzata in due rette immaginarie e coniugate.*

Poiché l'essere un punto reale P_0 di una quadrica irriducibile $\mathcal{Q}$ iperbolico, parabolico o ellittico dipende da $det(B)$ e non dal particolare punto P_0, si ha

Corollario 7 *Se una quadrica irriducibile* $\mathcal{Q}$ *ha un punto iperbolico allora tutti i suoi punti reali sono iperbolici; se ha un punto parabolico allora tutti i suoi punti reali sono parabolici; se ha un punto ellittico allora tutti i suoi punti reali sono ellittici.*

Definizione 26 *Si dice che una quadrica irriducibile $\mathcal{Q}$ è:*

a punti iperbolici *se ha un punto iperbolico;*

a punti ellittici *se ha un punto ellittico;*

a punti parabolici *se ha un punto parabolico.*

Poiché una quadrica irriducibile $\mathcal{Q}$ ha un punto parabolico $\Longleftrightarrow det(B) = 0$, si ha

Corollario 8 *I coni e cilindri sono tutte e sole le quadriche a punti parabolici.*

5.9 Studio delle quadriche non degeneri

I) Cominciamo con lo studio dell'**ellissoide reale**. La sua equazione in forma canonica è:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \tag{5.15}$$

È immediato provare le seguenti elementari proprietà.

1. La parte reale dell'ellissoide è all'interno del parallelepipedo limitato dai piani: $X = \pm a$, $Y = \pm b$, $Z = \pm c$.

2. I piani coordinati $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sono piani di simmetria per la quadrica.

3. L'origine O del sistema di riferimento è centro di simmetria per la quadrica.

4. La quadrica è a punti ellittici.

5. Le sezioni piane della quadrica con piani non tangenti sono tutte ellissi, in quanto la C_∞ è irriducibile e priva di punti reali, e quindi la retta impropria del piano secante la incontra sempre in due punti impropri immaginari e coniugati.

II) L'equazione:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \tag{5.16}$$

è l'equazione canonica dell'**iperboloide ad una falda o iperbolico**, visto che $det(B) > 0$. È immediato provare le seguenti elementari proprietà.

1. La parte reale della quadrica non è tutta al finito.
2. I piani coordinati $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sono piani di simmetria per la quadrica.
3. L'origine O del sistema di riferimento è centro di simmetria per la quadrica.
4. Su tale quadrica le sezioni piane con piani non tangenti possono essere iperboli, ellissi e parabole, vista la natura della C_∞.

III) L'equazione:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 \tag{5.17}$$

è l'equazione canonica di un **iperboloide a due falde o ellittico**, visto che in tal caso $det(B) < 0$.
Si possono ripetere le stesse considerazioni fatte per l'iperboloide iperbolico. Questa volta la quadrica è a punti ellittici.
Le sezioni piane con piani non tangenti anche in tal caso possono essere iperboli, ellissi e parabole.

IV) L'equazione:

$$\frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 2X \tag{5.18}$$

è l'equazione canonica del **paraboloide a sella o iperbolico**, in quanto si ha $det(B) > 0$.

1. I piani di equazione: $Y = 0$ e $Z = 0$ sono di simmetria.
2. La parte reale della quadrica non è tutta al finito.
3. In tal caso la C_∞ è spezzata in due rette reali e distinte r e s. Le sezioni piane fatte con piani propri e non tangenti sono iperboli se la retta impropria del piano secante non passa per il punto $C = r \cap s$. Se invece la retta impropria del piano secante passa per C la sezione è una parabola.

V) l'equazione:

$$\frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 2X \tag{5.19}$$

è l'equazione canonica del **paraboloide ellittico**, in quanto in tal caso $det(B) < 0$. Valgono le stesse considerazioni dell'esempio precedente.
Le sezioni piane con piani non tangenti sono in tal caso ellissi o parabole.

5.10 Sistemi di rette sulle quadriche

Le quadriche vengono dette superficie rigate perché esse contengono dei sistemi di rette che, a secondo del tipo di quadrica considerata, possono essere reali o immaginarie.
L'iperboloide iperbolico e il paraboloide iperbolico sono le quadriche contenenti delle famiglie di rette reali. Consideriamo per esempio l'equazione canonica dell'iperboloide iperbolico:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \tag{5.20}$$

Tale equazione si può anche scrivere nella forma:

$$\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right)\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}\right) = \left(1 - \frac{Z}{c}\right)\left(1 + \frac{Z}{c}\right) \tag{5.21}$$

Dalla precedente si deducono i due sistemi seguenti:

$$(S_1)\ \begin{cases} \lambda\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}\right) = \mu\left(1 + \frac{Z}{c}\right) \\ \\ \mu\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right) = \lambda\left(1 - \frac{Z}{c}\right) \end{cases} \tag{5.22}$$

$$(S_2)\ \begin{cases} \lambda'\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right) = \mu'\left(1 + \frac{Z}{c}\right) \\ \\ \mu'\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}\right) = \lambda'\left(1 - \frac{Z}{c}\right) \end{cases} \tag{5.23}$$

È chiaro che (S_1) ed (S_2) rappresentano, al variare dei parametri λ e μ, λ' e μ', due sistemi di rette giacenti sulla quadrica.

Infatti il sistema (S_1) rappresenta una totalità di rette, dipendenti, per esempio, dal parametro $\frac{\lambda}{\mu}$ (o $\frac{\mu}{\lambda}$). Ed è immediato verificare che eliminando tale parametro si ottiene come luogo la nostra quadrica. Ciò vuol dire che la quadrica è "generata"dalle rette di (S_1). Analogamente il discorso vale per le rette di (S_2).
Per tali sistemi di rette, valgono le seguenti proprietà:

1. *Per un punto P_0 della quadrica passa una ed una sola retta del sistema (S_1) e una ed una sola retta del sistema (S_2).*

Infatti imponendo alla generica retta del sistema (S_1) di passare per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, punto della quadrica, si ottiene

$$\begin{cases} \lambda\Big(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\Big) & = \mu\Big(1 + \dfrac{z_0}{c}\Big) \\ \\ \mu\Big(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\Big) & = \lambda\Big(1 - \dfrac{z_0}{c}\Big) \end{cases} \tag{5.24}$$

Il precedente è un sistema lineare omogeneo di due equazioni nelle incognite λ e μ, col determinante dei coefficienti nullo, visto che P_0 appartiene alla quadrica. Come sappiamo tale sistema ammette una e una sola soluzione non nulla, a meno di un fattore di proporzionalità. Quindi c'è una e una sola retta di (S_1) passante per P_0. Analogamente c'è una e una sola retta di (S_2) passante per P_0.

2. *Rette di uno stesso sistema sono sghembe.*
   Infatti se due rette r_1 ed r_2 del sistema (S_1) fossero incidenti in un punto R, allora per R passerebbero due rette di uno stesso sistema, contro quanto provato nel punto precedente.

3. *Ogni retta giacente sulla quadrica è in (S_1) o in (S_2).*
   Infatti sia r è una retta giacente sulla quadrica, con $r \notin (S_1)$. Sia $A \in r$ ed r_1 la retta in (S_1) passante per A. Allora r deve appartenere a (S_2), perché se così non fosse la retta r_2 di (S_2) passante per A sarebbe distinta da r. Ma ciò non è possibile perché altrimenti le tre rette r, r_1, r_2, giacenti sulla quadrica, sarebbero tangenti e il piano da esse individuato secherebbe la quadrica in (almeno) tre rette distinte; e ciò è assurdo.

4. *Rette di due sistemi diversi sono complanari.*
   Infatti se due rette $r_1 \in (S_1)$ e $r_2 \in (S_2)$ fossero sghembe, allora preso un punto $T \in \mathcal{Q}$ fuori da entrambe le rette, esisterebbe una retta t passante per T incidente sia r_1 che r_2. Ma allora la retta t apparterrebbe a $\mathcal{Q}$, ed essendo incidente sia r_1 che r_2, non apparterrebbe a nessuno dei due sistemi di rette, contro quanto abbiamo provato in 3.

Analoghe considerazioni si possono fare per i paraboloidi iperbolici. Anche in tal caso si ottengono due famiglie di rette reali giacenti sulla quadrica.
Nel caso di ellissoidi, iperboloidi ellittici e paraboloidi ellittici le stesse considerazioni portano a sistemi di rette sulle quadriche che però non sono reali.

5.11 Polarità rispetto ad una quadrica

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non degenere di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$. Abbiamo visto nel in **5.8** che per ogni punto $P_0 \in \mathcal{Q}$, non vertice, si definisce il piano tangente π_0 di equazione: ${}^t\underline{x}_0B\underline{x} = 0$.
Sia adesso P_0 un qualunque punto dello spazio.

Definizione 27 *Si chiama* **piano polare** *del punto P_0 il piano π_0 di equazione ${}^t\underline{x}_0B\underline{x} = 0$. Il punto P_0 si chiama il* **polo** *di π_0.*

È chiaro che per ogni punto P_0, il piano polare è perfettamente determinato. Se fosse ${}^t\underline{x}_0B = (0, 0, 0, 0)$ allora seguirebbe $B\underline{x}_0 = \underline{0}$ e il punto P_0 sarebbe vertice, contro l'ipotesi che la quadrica è non degenere.

Viceversa dato un qualunque piano π di equazione: $ax+by+ct+dt = 0$ esiste un unico punto P_0 avente π come piano polare. Infatti, detta ${}^t\underline{x}_0B\underline{x} = 0$ l'equazione del piano polare del generico punto P_0, le due equazioni definiscono lo stesso piano π, se hanno i coefficienti proporzionali.
Ciò implica che

$$B\underline{x}_0 = \varrho \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Essendo $det(B) \neq 0$, tale sistema ammette una ed una sola soluzione.
Quindi esiste un unico punto P_0 avente π come piano polare.

Abbiamo così provato che c'è una corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, tra tutti i punti dello spazio e tutti i piani dello spazio.

Tale corrispondenza si chiama **la polarità**, rispetto alla quadrica non degenere $\mathcal{Q}$.

Definizione 28 *Un punto P_0 si dice* **autoconiugato** *se appartiene al proprio piano polare π_0.*
Analogamente un piano π_0 si dice **autoconiugato** *se contiene il proprio polo P_0.*
Due punti si dicono **coniugati** *se l'uno appartiene al piano polare dell'altro.*

Sono immediate le seguenti proprietà.

1. Se $P_0 \in \mathcal{Q}$ allora il piano polare π_0 coincide col piano tangente.

2. Tutti e soli i punti autoconiugati sono i punti della quadrica $\mathcal{Q}$.
   Infatti: $P_0 \in \pi_0 \iff {}^t\underline{x}_0 B \underline{x}_0 = 0 \iff P_0 \in \mathcal{Q}$.

3. **Teorema di reciprocità** *Siano P_0, P_1 due qualunque punti dello spazio e π_0, π_1 i loro piani polari. Si ha: $P_0 \in \pi_1 \iff P_1 \in \pi_0$.*
   Infatti dire che $P_1 \in \pi_0$ vuol dire che ${}^t\underline{x}_0 B \underline{x}_1 = 0$. Ma ${}^t\underline{x}_0 B \underline{x}_1$ è una matrice 1×1 ed allora coincide con la sua trasposta; quindi si ha ${}^t\underline{x}_1 B \underline{x}_0 = 0$, cioè $P_0 \in \pi_1$ e viceversa.

4. Se un punto R descrive una retta r allora il suo piano polare π_R varia in un fascio.
   Infatti le coordinate omogenee di R si possono esprimere come combinazione lineare omogenea delle coordinate omogenee di due punti P_0 e P_1 di r, cioè: $\underline{x}_R = \lambda \underline{x}_0 + \mu \underline{x}_1$.
   Allora l'equazione del piano polare π_R è :
   ${}^t\underline{x}_R B \underline{x} = \lambda({}^t\underline{x}_0 B \underline{x}) + \mu({}^t\underline{x}_1 B \underline{x}) = 0$. Quest'ultima è l'equazione del fascio di piani avente per asse la retta $r' = \pi_0 \cap \pi_1$.
   Due rette come r ed r' si dicono **rette coniugate** nella polarità, rispetto alla quadrica $\mathcal{Q}$.

In analogia a quanto fatto per le coniche si dà la seguente

Definizione 29 *Si chiama* **centro della quadrica** *il polo del piano improprio.*

Proposizione 20 *Il* centro *di una quadrica non degenere $\mathcal{Q}$ di equazione ${}^t\underline{x} B \underline{x} = 0$ è il punto $C = (B_{41}, B_{42}, B_{43}, |A|)$, dove B_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij} in B e $|A|$ è il determinante della sottomatrice A di B.*

Dimostrazione. Basta cercare il polo P_0 del piano improprio $t = 0$. Si deve allora avere: ${}^t\underline{x}_0 B = (0, 0, 0, 1)$. Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}t_0 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}t_0 = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}t_0 = 0 \end{cases} \tag{5.25}$$

Il precedente è un sistema omogeneo di 3 equazioni in 4 incognite, con rango della matrice dei coefficienti tre. Come sappiamo tale sistema ammette una sola soluzione, a meno di un fattore di proporzionalità, e una base per lo spazio delle soluzioni si trova prendendo i determinanti, a segni alternati, dei minori che si ottengono sopprimendo ordinatamente le colonne della matrice dei coefficienti. Da ciò il risultato di cui all'enunciato. □

Osservazione 16 *È chiaro che ellissoidi e iperboloidi hanno il centro proprio, in quanto $|A| \neq 0$. Per tali quadriche il centro coincide con il centro di simmetria, come visto in (5.10).*
Per i paraboloidi, che hanno $|A| = 0$, il centro è improprio, quindi appartiene al proprio piano polare. Ne segue che il centro nei paraboloidi è autoconiugato. Se ne deduce che il piano improprio è tangente alla quadrica $\mathcal{Q}$ in C e quindi la seca in una conica spezzata, in due rette reali e distinte se il paraboloide è iperbolico, oppure in due rette immaginarie e coniugate se il paraboloide è ellittico.

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non degenere e P_0 un punto non appartenente a $\mathcal{Q}$. Si dimostra il seguente

Teorema 16 *Le rette tangenti a $\mathcal{Q}$ per P_0 sono tutte e sole le rette che congiungono P_0 con i punti della conica sezione $\Gamma = \mathcal{Q} \cap \pi_0$, dove π_0 è il piano polare di P_0 rispetto a $\mathcal{Q}$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta provare che se una retta r per P_0 è tangente alla quadrica in un punto T, allora T e P_0 sono coniugati. Infatti r deve stare sul piano tangente a $\mathcal{Q}$ in T, diciamolo π_T; quindi per il teorema di reciprocità il piano polare π_0 di P_0 dovrà passare per T.
Viceversa se P_0T è la retta congiungente P_0 con un punto T della conica sezione Γ, segue che i punti P_0 e T sono coniugati; si deduce che il piano tangente in T deve contenere la retta P_0T, la quale è quindi tangente alla quadrica in T. □

Dal teorema precedente si deduce che il luogo delle rette tangenti a $\mathcal{Q}$ e passanti per $P_0 \notin \mathcal{Q}$ è un cono di vertice P_0 se P_0 è proprio, un cilindro se P_0 è improprio. Si pone quindi la seguente

Definizione 30 *Si chiama* **cono o cilindro circoscritto** *alla quadrica da P_0, il luogo delle rette per P_0 tangenti alla quadrica.*

Per trovare l'equazione del cono o cilindro circoscritto ad una data quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$ da un punto P_0 si può procedere nel modo seguente:

si consideri la generica retta P_0P per P_0 e si faccia sistema con la quadrica. Come sappiamo si ottiene la risolvente:

$$\lambda^2({}^t\underline{x}_0 B\underline{x}_0) + 2\lambda\mu({}^t\underline{x}_0 B\underline{x}) + \mu^2({}^t\underline{x}B\underline{x}) = 0 \tag{5.26}$$

Basta imporre che la generica retta incontri la quadrica in due punti coincidenti. A tale scopo il discriminante della (5.26) deve essere nullo. Quindi il luogo richiesto ha equazione:

$$({}^t\underline{x}_0 B\underline{x})^2 - ({}^t\underline{x}_0 B\underline{x}_0)({}^t\underline{x}B\underline{x}) = 0$$

Si ha allora che, detta $f(P) = 0$ l'equazione della quadrica e $\phi_0 = 0$ l'equazione del piano polare del punto P_0, l'equazione del cono circoscritto si può ottenere dalla formula:

$$\phi_0^2 - f(P_0)f(P) = 0$$

dove $f(P_0)$ è il valore assunto dall'equazione della quadrica in P_0.

5.12 Alcune osservazioni

Supponiamo che sia data una conica Γ di equazioni: $z = 0$; $x^2 + 2y^2 = 2$. Ci poniamo il problema di determinare l'equazione della generica quadrica contenente la data conica Γ. Ricordiamo che una quadrica dello spazio ha equazione:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) \equiv\ & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + a_{22}y^2 + \\ & + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + a_{33}z^2 + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.27}$$

che, raggruppando tutti i termini contenenti la variabile z, si può riscrivere nella forma:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) \equiv\ & z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_{34}t) + a_{11}x^2 + \\ & + 2a_{12}xy + 2a_{14}xt + a_{22}y^2 + 2a_{24}yt + a_{44}t^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Si vede subito dalla precedente che a fattore della z c'è una forma lineare generica in x, y, z, t. Se quindi noi vogliamo che secando la generica quadrica col piano $z = 0$ si ottenga la conica data, dobbiamo considerare la quadrica di equazione:

$$z(ax + by + cz + dt) + x^2 + 2y^2 - 2 = 0. \tag{5.29}$$

Come si vede la generica quadrica contenente una data conica dipende da quattro parametri a, b, c e d. Ciò è in accordo con la teoria generale. Infatti per individuare una quadrica si devono assegnare nove condizioni lineari indipendenti; per individuare una conica si devono assegnare cinque condizioni lineari. Quindi per individuare la generica quadrica contenente una data conica si devono assegnare quattro condizioni lineari.
Dall'esempio concreto che abbiamo esaminato si può prendere spunto per affrontare il problema in generale, nel senso che ora preciseremo.
Supponiamo che sia data la conica di equazioni: $x - z = 0$; $x^2 - 3y^2 + 2xz - 4yz = 0$. Determinare la generica quadrica contenente la conica.
È chiaro che ci si può ricondurre al caso precedente, facendo un cambiamento di coordinate, ne segue che la generica quadrica contenente la nostra conica ha equazione:

$$(x - z)(ax + by + cz + dt) + x^2 - 3y^2 + 2xz - 4yz = 0 \tag{5.30}$$

Portiamo un ultimo esempio. Determinare la generica quadrica avente come C_∞ la conica: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; $t = 0$.
Per quanto abbiamo visto tale quadrica ha equazione:

$$t(ax + by + cz + dt) + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \tag{5.31}$$

Come vedremo questa è l'equazione di una sfera.

5.13 Sfere

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.
Siano dati un punto C di coordinate (α, β, γ) e un numero reale $r > 0$.
Il luogo dei punti $P = (x, y, z)$ tali che $d(P, C) = r$ si può scrivere nella forma:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2 \tag{5.32}$$

Con opportune posizioni la precedente si può scrivere anche nella forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \tag{5.33}$$

da cui si deduce subito che per determinare una sfera si devono assegnare quattro condizioni indipendenti, al fine di determinare i parametri a, b, c, d.

Viceversa sia data una equazione del tipo (5.33), col metodo del completamento dei quadrati, essa si può scrivere anche nella forma:

$$\left[x-\left(-\frac{a}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(-\frac{b}{2}\right)\right]^2+\left[z-\left(-\frac{c}{2}\right)\right]^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d \quad (5.34)$$

Se nella precedente equazione (5.34) il termine a secondo membro $h=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d$ è positivo allora l'equazione (5.34) è l'equazione di una sfera di centro $C=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2})$ e raggio $r=\sqrt{h}$. Tale nozione si generalizza anche al caso in cui il precedente h è negativo o nullo. Quando h è negativo la sfera è priva di punti reali, mentre quando h è nullo l'unico punto reale è il centro C. In definitiva possiamo porre la seguente:

Definizione 31 *Si definisce* **sfera** *una quadrica la cui equazione è del tipo:*

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=h.$$

Se si vogliono cercare i punti impropri di una sfera, basta scrivere la sua equazione in coordinate omogenee e secarla col piano improprio $t=0$.
Se ne deduce che la C_∞ di una sfera è la conica: $t=0; \quad x^2+y^2+z^2=0$.
Tale conica si chiama il **cerchio assoluto**, e si può interpretare come il luogo dei punti ciclici dello spazio.
Se una quadrica contiene il cerchio assoluto è una sfera, nel senso della definizione che abbiamo dato. Infatti perché una quadrica contenga il cerchio assoluto la sua equazione dev'essere del tipo:

$$t(ax+by+cz+dt)+x^2+y^2+z^2=0$$

che scritta in coordinate non omogenee fornisce l'equazione della generica sfera.
Come abbiamo osservato per determinare una sfera si devono assegnare quattro condizioni indipendenti. Per esempio imporre il passaggio per quattro punti, non complanari. Se $P_i=(x_i,y_i,z_i)$ allora l'equazione della sfera si trova dalla formula:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad (5.35)$$

La precedente è l'equazione di una sfera, soddisfatta dalle coordinate dei punti P_i.
Si considerino adesso due sfere distinte S_1 ed S_2. Per trovare il luogo comune alle due sfere si deve risolvere il sistema formato dalle loro equazioni, in coordinate omogenee:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1xt + b_1yt + c_1zt + d_1t^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2xt + b_2yt + c_2zt + d_2t^2 = 0 \end{cases} \tag{5.36}$$

Il sistema (5.36) è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1xt + b_1yt + c_1zt + d_1t^2 = 0 \\ [(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2)t]\, t = 0 \end{cases} \tag{5.37}$$

Il precedente sistema rappresenta una curva nello spazio, del quarto ordine, spezzata nel cerchio assoluto e nella circonferenza Γ di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1xt + b_1yt + c_1zt + d_1t^2 = 0 \\ (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2)t = 0 \end{cases} \tag{5.38}$$

Se si considera il fascio di sfere determinato dalle equazioni delle due sfere S_1 ed S_2 il piano di equazione:

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2)t = 0 \tag{5.39}$$

si chiama il **piano radicale** del fascio di sfere.
Osserviamo che quando le due sfere sono concentriche, cioè $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$; $c_1 = c_2$, allora il piano radicale coincide col piano improprio $t = 0$. In tal caso le due sfere hanno doppiamente a comune il cerchio assoluto.

5.13.1 Esempi

1. Determinare il fascio di sfere contenenti la circonferenza di equazioni: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $z = 1$.
   Innanzitutto si osserva che, anche nel caso delle quadriche, un fascio è individuato da due qualunque quadriche passanti per il luogo base, che in tal caso è la conica data. Si può rispondere subito a tale questione considerando il fascio individuato dalla sfera S_1 di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e da S_2 che è la quadrica spezzata nel piano radicale $z = 1$ e nel piano improprio. Quindi il fascio di sfere richiesto ha equazione:
   $$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \mu(z - 1)t = 0.$$

2. Determinare il fascio di sfere tangenti al piano di equazione: $3x+2y-z=0$, nel suo punto $O=(0,0,0)$.
   Il fascio si può ottenere facendo combinazione lineare della sfera S_1, di centro O e raggio nullo e della quadrica S_2 spezzata nel piano $3x+2y-z=0$ e nel piano improprio $t=0$. Quindi il fascio richiesto si può scrivere:
   $$\lambda(x^2+y^2+z^2)+\mu(3x+2y-z)t=0.$$

5.14 Cenni su curve e superficie nello spazio

Noi abbiamo studiato le quadriche che sono le superficie di ordine due; ma si possono studiare superficie di ordine n qualunque.
Una tale superficie S è il luogo dei punti propri o impropri, reali o immaginari che con le loro coordinate omogenee soddisfano una forma $F(x,y,z,t)=0$, di grado n nelle variabili x,y,z, e t.
C'è da convenire che se il polinomio $F(x,y,z.t)$ si spezza nel prodotto di k fattori irriducibili F_1, $F_2,\cdots,F_k$ ciascuno contato n_1, $n_2,\cdots,n_k$ volte cioè se $F=F_1^{n_1}\cdot F_2^{n_2}\cdots F_k^{n_k}$, allora la superficie è costituita dai punti di $S_1:\ F_1=0$ contati n_1 volte,..., dai punti di $S_k:\ F_k=0$ ciascuno contato n_k volte.
Le superficie $F_1=0,\dots,F_k=0$ sono dette le *componenti irriducibili* della superficie $F=0$.
Come abbiamo visto, una conica nello spazio si può rappresentare come intersezione di una quadrica con un piano.
Più in generale, l'intersezione $\mathcal{L}=S\cap T$ di due superficie S e T, senza componenti comuni, di gradi m ed n definisce una curva $\mathcal{L}$ nello spazio di grado mn.
Talvolta è possibile assegnare una curva $\mathcal{L}$, in coordinate non omogenee, mediante equazioni parametriche.
Precisamente:
$$\mathcal{L}:\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases} \tag{5.40}$$
dove $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ sono funzioni non tutte costanti del parametro t, che possono essere algebriche (o trascendenti).
Noi considereremo solo curve particolarmente semplici e per lo più algebriche.

Anche di una superficie S si può dare talvolta una rappresentazione parametrica.
Precisamente, dette x, y, z le coordinate non omogenee di un punto P di S, si ha:

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \tag{5.41}$$

dove $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ sono funzioni, non costanti, algebriche (o trascendenti) di due parametri indipendenti u e v.

5.14.1 Superficie coniche e cilindriche

Siano dati una curva $\mathcal{L}$ e un punto proprio P_0. Si pone la seguente

Definizione 32 *Si dice* superficie conica *di vertice P_0 e* direttrice $\mathcal{L}$ *la superficie luogo delle rette passanti per P_0 e per il generico punto $G \in \mathcal{L}$, al variare di G.*

Data una curva $\mathcal{L}$ e un punto improprio P_∞, si pone la seguente

Definizione 33 *Si dice* superficie cilindrica *di vertice P_∞ e* direttrice $\mathcal{L}$ *la superficie luogo delle rette che passano per il generico punto $G \in \mathcal{L}$ e hanno per direzione quella determinata dal punto improprio P_∞, al variare di G.*

Esempio a) *Data la conica $\mathcal{L}$ di equazioni: $z = 0$; $x^2 - y^2 - 1 = 0$ e il punto $P_0 = (1, 0, -1)$. Determinare l'equazione del cono con vertice P_0 e direttrice $\mathcal{L}$.*
Si consideri il punto generico $G = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}$. Esso deve soddisfare le equazioni di $\mathcal{L}$. Quindi dev'essere $z_0 = 0$ e $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$. Il nostro luogo è descritto dalle *generatrici* P_0G. Una tale retta ha equazioni:

$$\frac{x - x_0}{1 - x_0} = \frac{y - y_0}{-y_0} = \frac{z}{-1}$$

Allora per trovare il luogo descritto da tali rette si deve considerare il sistema:

$$\begin{cases} x_0^2 - y_0^2 = 1 \\ x_0 = \dfrac{x + z}{1 + z} \\ y_0 = \dfrac{y}{1 + z} \end{cases} \tag{5.42}$$

dove la seconda e la terza equazione sono le equazioni della retta P_0G, mentre la prima è la condizione che dev'essere soddisfatta perché $G \in \mathcal{L}$.
Per trovare l'equazione cartesiana del luogo si devono eliminare i parametri x_0 e y_0 dal sistema.
Si deduce l'equazione del luogo:

$$\left(\frac{x+z}{1+z}\right)^2 - \left(\frac{y}{1+z}\right)^2 - 1 = 0$$

che si può anche scrivere:

$$x^2 - y^2 + 2xz - 2z - 1 = 0$$

Esempio b) *Sia data la conica* Γ *di equazioni* $x - z = 0$; $x^2 - xy + 2z^2 - 2x = 0$.
Determinare l'equazione del cilindro avente direttrice Γ *e vertice il punto* $P_\infty = (1, -1, -1, 0)$
Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto generico appartenente a Γ. Pertanto tale punto con le sue coordinate deve soddisfare le equazioni di Γ. Si ha quindi $x_0 = z_0$; $x_0^2 - x_0y_0 + 2z_0^2 - 2x_0 = 0$.
Tenuto conto che le prime tre coordinate del punto improprio P_∞ danno i parametri direttori delle rette aventi direzione determinata da quel punto improprio, le equazioni della retta P_0P_∞ sono:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{-1} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Quindi l'equazione del cilindro richiesto si trova come risultante del sistema:

$$\begin{cases} 3x_0^2 - x_0y_0 - 2x_0 = 0 \\ x_0 = \dfrac{x+z}{2} \\ y_0 = \dfrac{x+2y-z}{2} \end{cases} \tag{5.43}$$

Eliminando i parametri x_0, y_0 con semplici calcoli si ottiene l'equazione del cilindro:

$$x^2 - xy + 3xz - yz + 2z^2 - 2x - 2z = 0.$$

C'è da osservare che nei precedenti esempi la direttrice $\mathcal{L}$ è stata una conica, ma se fosse stata una curva di ordine più alto il procedimento sarebbe stato lo stesso. In tal caso si sarebbe trovata una superficie di ordine più alto anziché trovare una quadrica.

5.14.2 Proiezioni di curve

Sia data una curva $\mathcal{L}$ nello spazio. Proiettare questa curva su un dato piano, da un punto P_0, proprio o improprio, significa trovare il luogo dei punti del piano ottenuti come intersezione del piano con le rette P_0G, dove G è il generico punto di $\mathcal{L}$.

Chiaramente per proiettare la curva $\mathcal{L}$ su un piano π dal punto proprio P_0 basta trovare la curva $\mathcal{L}'$ intersezione del cono di vertice P_0 e direttrice $\mathcal{L}$ col piano π.

Riferendoci ai dati dell'esempio a) del numero precedente, se si vuole proiettare la conica Γ data di equazioni: $z = 0$; $x^2 - y^2 - 1 = 0$, dal punto $P_0 = (1, 0, -1)$ sul piano di equazione $x - y + z = 0$, basta intersecare il cono trovato di equazione $x^2 - y^2 + 2xz - 2z - 1 = 0$ col piano. Quindi la proiezione richiesta è la conica Γ' di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xz - 2z - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Se si vuole proiettare una curva $\mathcal{L}$ su un piano π, da un punto improprio P_∞, basta secare il cilindro di vertice P_∞ e direttrice $\mathcal{L}$ col piano π.

Riferendoci ai dati dell'esempio b) del numero precedente se vogliamo proiettare la conica Γ di equazioni $x - z = 0$; $x^2 - xy + 2z^2 - 2x = 0$ dal punto improprio $P_\infty = (1, -1, -1, 0)$ sul piano $y = 0$, basta intersecare l'equazione del cilindro trovato nell'esempio col piano $y = 0$. Quindi le equazioni della conica proiezione Γ' si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - xy + 3xz - yz + 2z^2 - 2x - 2z = 0 \end{cases}$$

5.15 Caratterizzazione di cilindri e coni

Sia data nello spazio una retta r come intersezione dei due piani
$f(P) = 0$; $g(P) = 0$ e sia S una superficie di equazione $\chi(P) = 0$. Vogliamo provare il seguente

Teorema 17 *Condizione necessaria e sufficiente perché S sia una* superficie cilindrica *con generatrici parallele alla retta r è che esista una funzione di due variabili $\phi = \phi(u, v)$ tale che l'equazione della superficie $\chi(P) = 0$ si possa scrivere nella forma: $\phi(f(P), g(P)) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che la nostra superficie S abbia equazione $\phi(f(P), g(P)) = 0$. Detto P_0 un qualunque punto di S, basta provare che la retta per P_0 parallela ad r giace sulla superficie. Intanto per ipotesi $\phi(f(P_0), g(P_0)) = 0$. Poi le equazioni della retta r' per P_0 parallela ad r si possono scrivere nella forma $f(P) = f(P_0)$; $g(P) = g(P_0)$. La precedente affermazione segue dal fatto che se il piano π: $f(P) = 0$ ha equazione $ax + by + cz + d = 0$ il piano per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ parallelo a π ha equazione $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, che è equivalente a $f(P) = f(P_0)$. D'altra parte la retta per un punto P_0 parallela alla retta intersezione di due piani è l'intersezione dei due piani per P_0 paralleli ai piani che determinano la retta data. Segue quindi che per ogni punto P' della retta r' si ha $f(P') = f(P_0)$; $g(P') = g(P_0)$ ed allora $\phi(f(P'), g(P')) = 0$, cioè la retta r' giace su S.
Viceversa supponiamo che S sia una superficie cilindrica con generatrici parallele alla retta r intersezione dei due piani $f(P) = 0$ e $g(P) = 0$. È possibile operare un cambiamento di coordinate in modo che la retta r sia l'asse delle $\vec{Z}$ di un nuovo riferimento nello spazio $O'\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$. Come sappiamo, S in tale riferimento deve avere equazione del tipo: $\Phi(X, Y) = 0$.
I due piani $f(P) = 0$; $g(P) = 0$ hanno, nel nuovo riferimento, equazioni: $F(P) = 0$ e $G(P) = 0$.
A questo punto osserviamo che i due piani coordinati $X = 0$ e $Y = 0$ sono piani del fascio individuato da $F(P) = 0$ e $G(P) = 0$. Quindi: $X = aF + bG$ e $Y = cF + dG$. Allora la superficie S si può scrivere $\Phi(aF + bG, cF + dG) = 0$. Riscrivendo questa equazione nel vecchio riferimento si vede subito che l'equazione di S è una funzione delle due variabili $f(P)$ e $g(P)$ uguagliata a zero, come volevasi. $\square$

Diamo adesso la caratterizzazione delle superficie coniche algebriche con vertice nella origine O del riferimento.

Teorema 18 *Condizione necessaria e sufficiente perché la superficie algebrica S di equazione $f(x, y, z) = 0$ sia una superficie conica con vertice nell'origine O è che il polinomio $f(x, y, z)$ sia omogeneo.*

Dimostrazione. Se $f(x, y, z)$ è omogeneo allora detto P_0 un qualunque punto di S si ha $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Consideriamo la retta OP_0 e proviamo che essa giace sulla quadrica. Infatti le sue equazioni si possono scrivere nella forma: $x = tx_0$; $y = ty_0$; $z = tz_0$. Intersecando con la superficie si ha la risolvente: $t^\alpha f(x_0, y_0, z_0) = 0$, la quale è una identità. Quindi l'origine O

è vertice per S.
Viceversa se S è una superficie conica col vertice in O di equazione $f(x,y,z) = 0$, proviamo che $f(x,y,z)$ è omogeneo. Sia $\mathcal{L}$ una direttrice del cono, per esempio quella che si ottiene secando S col piano $z = 1$.
Scriviamo l'equazione della superficie conica di vertice O e direttrice $\mathcal{L}$. Sia $(x_0, y_0, 1)$ un punto generico di $\mathcal{L}$. Pertanto dev' essere $f(x_0, y_0, 1) = 0$. L'equazione della nostra superficie conica si ottiene come luogo delle generatrici OP_0, quindi eliminando i parametri x_0, y_0 e t dal sistema:

$$\begin{cases} f(x_0, y_0, 1) = 0 \\ x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = z_0 t \end{cases}$$

Si ottiene subito l'equazione $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0$, la quale è una funzione omogenea di grado zero. $\square$

Osservazione 17 *Se nel precedente teorema si considerano solo i polinomi omogenei irriducibili allora si caratterizzano le superfici coniche algebriche aventi l'origine O come unico vertice. Si ritrovano così i coni quadrici.*

5.16 Superficie di rotazione

Sia data nello spazio una retta r. Una superficie S si dice che è di **rotazione** attorno all'asse r se tutte le sezioni di S con piani perpendicolari ad r sono circonferenze con centri sulla retta r.

Esempio Sia data la retta g di equazioni $x = 2z$; $y = -2z$ e la retta r di equazioni $x = y = z$. Determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione di g attorno a r.
Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un generico punto di g. Allora le sue coordinate sono $(2z_0, -2z_0, z_0)$. Consideriamo il piano per P_0 perpendicolare a r, esso ha equazione $x - 2z_0 + y + 2z_0 + z - z_0 = 0$ ed incontra la retta r nel punto C di coordinate $(\frac{z_0}{3}, \frac{z_0}{3}, \frac{z_0}{3})$.
La circonferenza di centro C e raggio $d(P_0, C)$ del suddetto piano è una

generatrice della superficie di rotazione cercata.
Tale superficie si ottiene allora eliminando il parametro z_0 dal sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=z_0 \\ (x-\frac{z_0}{3})^2+(y-\frac{z_0}{3})^2+(z-\frac{z_0}{3})^2=(2z_0-\frac{z_0}{3})^2+(-2z_0-\frac{z_0}{3})^2+(z_0-\frac{z_0}{3})^2 \end{cases}$$

Dei semplici calcoli permettono di trovare la superficie richiesta; essa ha equazione:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{2}{3}(x+y+z)(x+y+z)=\frac{25}{3}(x+y+z)^2$$

che semplificata ulteriormente dà $x^2+y^2+z^2=9(x+y+z)^2$.
Tale superficie, come del resto si poteva prevedere geometricamente, è una superficie conica con vertice nell'origine delle coordinate, visto che la sua equazione è omogenea di grado 2.

In un caso particolare la superficie di rotazione di una curva $\mathcal{L}$ attorno ad un asse è veramente facile da scrivere. Ciò si ha quando la curva $\mathcal{L}$ giace su uno dei piani coordinati e l'asse di rotazione è uno degli assi coordinati. Precisamente:

Teorema 19 *Sia $\mathcal{L}$ una curva del piano $y=0$ di equazioni: $y=0$; $\phi(x,z)=0$. Allora l'equazione della superficie di rotazione attorno all'asse delle $\vec{z}$ si ottiene sostituendo $\sqrt{x^2+y^2}$ alla variabile x nell'equazione $\phi(x,z)=0$.*
Quindi la superficie di rotazione in tale caso è: $\phi(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

Dimostrazione. Sia $P_0=(x_0,0,z_0)$ un punto della curva $\mathcal{L}$. Mentre la curva ruota attorno all'asse delle $\vec{z}$ il punto P_0 si porta in un punto P_0' di coordinate (x_0',y_0',z_0), con la stessa z_0 in quanto P_0' e P_0 stanno entrambi su un piano perpendicolare all'asse $\vec{z}$. Ma dobbiamo imporre che le distanze di P_0 e P_0' dall'asse $\vec{z}$ siano uguali. Quindi dev'essere: $x_0^2=x_0'^2+y_0'^2$. Ne deriva che la superficie di rotazione è il luogo dei punti (x,y,z) per cui $\phi(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

5.16.1 Sezioni circolari di una quadrica

Nei numeri precedenti abbiamo visto come trovare la superficie di rotazione di una curva attorno ad una retta. Adesso vogliamo capire quando la sezione di una quadrica con un piano è una circonferenza. Cioé vogliamo studiare

le cosiddette *sezioni circolari* di una quadrica.
Ricordiamo che una conica, non contenente come parte la retta impropria, che passi per i punti ciclici del piano è una circonferenza, reale o immaginaria.
Inoltre abbiamo già osservato che la totalità dei punti ciclici dello spazio è un luogo, detto il cerchio assoluto, che ha equazioni $\begin{cases} t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$

È chiaro che per ottenere su una quadrica Q sezioni circolari la C_∞ della quadrica non dev'essere spezzata in due rette reali distinte o coincidenti, perché in tal caso non ci sarebbero piani che secano la quadrica in ellissi e quindi nemmeno in circonferenze.

Per fissare le idee supponiamo che la nostra quadrica Q sia un paraboloide ellittico, quadrica sulla quale sono consentite le sezioni circolari. La C_∞ della quadrica è spezzata in due rette immaginarie coniugate r ed $\overline{r}$. Sul piano improprio $t = 0$ la C_∞ di Q e il cerchio assoluto si secano in quattro punti immaginari $A, \overline{A}, B$ e $\overline{B}$, di cui $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono i punti complessi coniugati dei punti A e B. Se cerchiamo i piani reali che secano Q in circonferenze basta prendere tutti (e soli) i piani dei due fasci che hanno per asse le due rette reali $A\overline{A}$ e $B\overline{B}$. Ovviamente potrebbe accadere che A coincida con B e $\overline{A}$ con $\overline{B}$. In tal caso la retta $A\overline{A}$ coinciderebbe con $B\overline{B}$. Se ne conclude che, in entrambi i casi, ci sono infiniti piani che secano Q in circonferenze.
Nel primo caso, quando tutti e quattro i punti sono distinti, esaminiamo qual'è il luogo descritto dai centri delle circonferenze secate dai piani reali passanti per la retta $A\overline{A}$. Innanzitutto tali piani sono paralleli perché hanno la stessa giacitura, che è quella determinata dalla retta impropria $A\overline{A}$. Detto π un piano passante per la retta $A\overline{A}$ che seca Q in una circonferenza, per il teorema che lega le tangenti alle polari, segue che il centro della circonferenza essendo il polo della retta impropria del piano secante π è anche il punto comune alle tangenti al cerchio in A e $\overline{A}$. Quindi tali tangenti saranno anche tangenti a Q in A e $\overline{A}$, ed allora apparterranno ai piani tangenti alla quadrica Q in A e $\overline{A}$. In definitiva tutti i centri delle circonferenze secate dai piani aventi asse la retta $A\overline{A}$ apparterranno alla retta t intersezione dei due piani tangenti alla quadrica π_A e $\pi_{\overline{A}}$, rispettivamente in A e $\overline{A}$. La retta t incontra il piano improprio nel centro C del paraboloide. Tale punto non è il polo della retta $A\overline{A}$, nella polarità rispetto al cerchio assoluto perché le congiungenti C con A e $\overline{A}$ non sono tangenti al cerchio assoluto. Tale ultimo

fatto equivale a dire che la retta t non è perpendicolare ai piani del fascio di asse $A\overline{A}$.
Quanto affermato segue dalla seguente affermazione: sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0, 0)$ un punto del piano improprio. La sua polare, rispetto al cerchio assoluto, ha equazioni $\begin{cases} t = 0 \\ x_0x + y_0y + z_0z = 0. \end{cases}$
È ovvio che un qualunque piano $ax + by + cz + dt = 0$ che abbia retta impropria $\begin{cases} t = 0 \\ x_0x + y_0y + z_0z = 0 \end{cases}$ è perpendicolare alla direzione determinata dal punto improprio $(x_0, y_0, z_0, 0)$.
Quindi si puó affermare che, nel caso precedente, Q non è di rotazione intorno alla retta t. Perché ció accada deve invece verificarsi il secondo caso, quando si hanno le coincidenze dei punti $A = B$ e $\overline{A} = \overline{B}$.

La conclusione è che perché una quadrica sia di rotazione deve accadere che il cerchio assoluto e la C_∞ della quadrica siano bitangenti in A e $\overline{A}$. In tal caso tutti (e soli) i piani reali che la secano in circonferenze sono quelli del fascio di piani avente per asse la retta che congiunge A e $\overline{A}$, e il luogo descritto dai centri di tali circonferenze è la retta t intersezione dei piani tangenti alla quadrica Q in A e $\overline{A}$.

Oltre ai paraboloidi ellittici che abbiamo ora considerato, le quadriche su cui esistono sezioni circolari sono: i coni, i cilindri ellittici, gli ellissoidi e gli iperboloidi. Il ragionamento che abbiamo fatto nel caso esaminato è estendibile, con pochi e semplici adattamenti, a tutte le altre quadriche.

Facciamo un esempio che possa chiarire quanto affermato.

Esempio 27 *Consideriamo il paraboloide ellittico* $2x^2 + (y - z)^2 - (y + z) = 0$. *Proviamo che esso è di rotazione e troviamo la retta asse della rotazione.*

Dimostrazione. Come affermato nella teoria dobbiamo trovare i punti comuni al cerchio assoluto e alla conica all'infinito della nostra quadrica. Si ha

$$\begin{cases} t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ 2x^2 + (y - z)^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^2 = 2yz \end{cases}$$

da ció segue immediatamente

$$\begin{cases} t = 0 \\ (y+z)^2 = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}iz \end{cases}$$

Otteniamo quindi i due punti immaginari $A = (\sqrt{2}i, -1, 1, 0)$ e $\overline{A} = (-\sqrt{2}i, -1, 1, 0)$, ciascuno dei quali contato due volte visto che nel sistema la seconda equazione era $(y+z)^2 = 0$. Si deduce che la nostra quadrica è di rotazione. Tutti i piani che la secano in circonferenze sono tutti e soli quelli del fascio avente per asse la retta $A\overline{A}$. Nel nostro caso si imponga al generico piano dello spazio $ax + by + cz + dt = 0$ di passare per i due punti A e $\overline{A}$. Si ottiene $\begin{cases} \sqrt{2}ia - b + c = 0 \\ -\sqrt{2}ia - b + c = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$. In definitiva i piani che secano Q in circonferenze sono tutti e soli quelli del tipo $b(y+z) + dt = 0$. Troviamo adesso l'asse di rotazione. In conformità a quanto affermato si deve trovare la retta comune ai piani tangenti alla quadrica in A e $\overline{A}$. Nel nostro caso la matrice della quadrica è

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

I piani polari di A e $\overline{A}$ sono rispettivamente $2\sqrt{2}ix - 2y + 2z = 0$ e $-2\sqrt{2}ix - 2y + 2z = 0$. Il sistema formato dalle equazioni dei due piani è $\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$. Quest'ultima retta è l'asse di rotazione.

5.17 Alcuni esempi notevoli

Esempio 28 *Data la conica Γ di equazioni: $z = 0$, $y^2 - 2x = 0$. Fra le quadriche contenenti Γ:*

1. *caratterizzare quelle, a punti parabolici, aventi l'asse $\vec{z}$ come una generatrice;*

2. *determinare e studiare quelle aventi in Z_∞ il piano $y = 0$ come piano tangente;*

3. *caratterizzare i piani che secano le quadriche di cui al punto* 2. *in parabole.*

4. *Detta* $\overline{Q}$ *la quadrica del tipo* 2. *passante per il punto* $P = (1, 1, 1)$, *caratterizzare i piani che la secano in iperboli equilatere.*

1. Le quadriche contenenti Γ hanno equazione $z(ax + by + cz + d) + y^2 - 2x = 0$.

Perché contengano l'asse $\vec{z}$, facendo sistema con $x = 0, y = 0$ la risolvente dev'essere una identità. Facilmente si deduce $c = 0,\ d = 0$. Allora le quadriche sono del tipo: $axz + byz + y^2 - 2x = 0$. Secando col piano tangente nell'origine, che è $x = 0$, dobbiamo ottenere una conica spezzata in due rette coincidenti. Per $x = 0$ si ha $byz + y^2 = 0$. Deve essere $b = 0$.
La totalità delle quadriche che si ottiene è: $axz + y^2 - 2x = 0$.
Per $a = 0$ si ha un cilindro parabolico; per $a \neq 0$ si hanno coni.
2. Come nel quesito precedente l'equazione della generica quadrica contente la conica è $z(ax + by + cz + dt) + y^2 - 2x = 0$. Perchè la quadrica passi per Z_∞ dev'essere $c = 0$. Il piano tangente in Z_∞ è : $ax + by + dt = 0$. Perché questa equazione definisca il piano $y = 0$ dev'essere: $a = 0,\ d = 0$. Si ottiene allora $byz + y^2 - 2x = 0$, con $b \neq 0$.
Le quadriche ottenute sono a punti iperbolici perché secando col piano tangente nell'origine che è $x = 0$ si ottiene $x = 0,\ y(bz + y) = 0$ che è una conica spezzata in due rette reali e distinte. La C_∞ è: $t = 0,\ y(bz + y) = 0$ ed è pure spezzata in due rette reali e distinte. Si tratta, quindi, sempre di paraboloidi iperbolici. Il centro di tali paraboloidi, punto comune alle due rette in cui si spezza la C_∞, è $X_\infty = (1, 0, 0, 0)$ per ogni quadrica del fascio.
3. I piani che secano le quadriche in parabole sono tutti e soli quelli passanti per il centro, esclusi i piani aventi per assi le due rette in cui si spezza la C_∞.
I piani per X_∞ sono quelli del tipo $b'y + c'z + d't = 0$ e dobbiamo ecludere i piani dei due fasci summenzionati. Deve quindi essere: $c' \neq 0;\ c' \neq bb'$.
4. La quadrica $\overline{Q}$ passante per $P = (1, 1, 1)$ ha equazione $yz + y^2 - 2x = 0$. La C_∞ della quadrica è $t = 0,\ y(y+z) = 0$. Consideriamo la retta impropria del generico piano $ax + by + cz + dt = 0$; essa seca la C_∞ nei due punti: $(c, 0, -a, 0)$ e $(b - c, -a, a, 0)$. Noi vogliamo che tali punti siano in direzioni ortogonali e pertanto dev'essere: $c(b - c) - a^2 = 0$. In conclusione tutti i piani i cui coefficienti soddisfano la precedente relazione secano la quadrica in iperboli equilatere.

Esempio 29 *Sia data la generica iperbole* Γ *di equazioni* $z = 0, \quad xy =$

k, con $k > 0$, e sia t una sua tangente. Dette A e B le intersezioni di t rispettivamente con gli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$,

1. *Trovare le equazioni della conica $\mathcal{C}$ luogo del punto $P = r \cap s$, dove r è la retta per A parallela all'asse trasverso di Γ, ed s la parallela per B all'asse $\vec{x}$.*

2. *Studiare le quadriche $\mathcal{Q}$ contenenti gli asintoti di $\mathcal{C}$, aventi in X_∞ il piano $y - z = 0$ come piano tangente e contenenti la conica spezzata nelle due rette:* $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$

3. *Tra i piani passanti per l'asse $\vec{z}$ determinare quelli che secano il paraboloide di $\mathcal{Q}$ in una iperbole equilatera e quelli che lo secano in una parabola.*

1. Lavoriamo nel piano $z = 0$. Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto generico della iperbole $xy = k$. P_0 con le sue coordinate deve soddisfare l'equazione della iperbole e si ha: $x_0y_0 = k$. L'equazione della tangente è data da $x_0y + y_0x = 2k$. Tale retta incontra gli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ rispettivamente in $A = (2k/y_0, 0)$ e $B = (0, 2k/x_0)$. Ne segue che le due rette r ed s hanno rispettivamente equazioni: $y = x - 2k/y_0$ e $y = 2k/x_0$. Il luogo descritto dal punto P si ottiene eliminando i parametri x_0 e y_0 dal sistema

$$\begin{cases} x_0y_0 = k \\ y = x - \dfrac{2k}{y_0} \\ y = \dfrac{2k}{x_0} \end{cases}$$

La conica luogo $\mathcal{C}$ ha equazioni: $\begin{cases} z = 0 \\ (x - y)y = 4k. \end{cases}$

2. La più generale quadrica contenente la conica spezzata nei due asintoti ha equazione:

$$z(ax + by + cz + d) + xy - y^2 = 0.$$

Essa passa per il punto X_∞ e il piano tangente in esso a $\mathcal{Q}$ ha equazione $az + y = 0$. Ne segue che dev'essere $a = -1$. Perché $\mathcal{Q}$ contenga la conica spezzata nelle due rette date, deve accadere che secando $\mathcal{Q}$ con $y = 0$ si ottenga un residuo proporzionale a $xz - z^2 + z = 0$. Si deduce che $\mathcal{Q}$ ha equazione: $z(-x + by + z - 1) + xy - y^2 = 0$.

L'origine O è un punto iperbolico; infatti il piano tangente in O ha equazione $z = 0$ e seca la quadrica nella conica spezzata nelle due rette di equazioni: $z = 0,\ y = 0$ e $z = 0,\ x - y = 0$. Quindi le quadriche del fascio $\mathcal{Q}$ sono tutte a punti iperbolici e sono iperboloidi iperbolici o paraboloidi iperbolici. Per ottenere i paraboloidi bisogna cercare i valori del parametro b per cui la C_∞ è spezzata. Si vede subito che ciò si verifica per $b = 0$. In tal caso la C_∞ si spezza nelle due rette $t = 0,\ y - z = 0$ e $t = 0,\ z + y - x = 0$. Il centro C del paraboloide è il punto comune a tali rette e si trova che $C = (2, 1, 1, 0)$.

3. Sia adesso $x = \lambda y$ l'equazione del generico piano contenente l'asse $\vec{z}$. Troviamo adesso i punti comuni alla retta impropria del piano secante e alla C_∞; essi sono $(\lambda, 1, 1, 0)$ e $(\lambda, 1, \lambda - 1, 0)$. Perché siano ortogonali dev'essere $\lambda^2 + 1 + \lambda - 1 = 0$; quindi i due piani $x = 0$ e $x + y = 0$ secano il paraboloide in iperboli equilatere. Fra i piani contenenti l'asse $\vec{z}$ c'è anche il piano di equazione $y = 0$, che non rientra nei piani indicati dall'equazione $x = \lambda y$. Si vede subito che esso non seca il paraboloide in punti in direzioni ortogonali. Le parabole si ottengono imponendo al fascio $x = \lambda y$ di passare per il centro C, escludendo i piani dei due fasci che contengono le due rette in cui si spezza la C_∞. Si ha $\lambda = 2$. Quindi il piano $x = 2y$ è l'unico piano che seca il paraboloide in una parabola. Infatti il piano $y = 0$ non passa per il punto C e d'altra parte $x = 2y$ non contiene le due rette in cui si spezza la C_∞.

Esempio 30 *Siano date le rette* r *ed* s *di equazioni rispettivamente*

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ z = 0. \end{cases}$$

1. *Detto α il generico piano contenente la retta* s*, sia* t *la retta che si ottiene proiettando ortogonalmente* r *su α. Determinare e studiare la quadrica Q descritta dalla retta* t *al variare di α nel fascio di piani che ha per asse la retta* s*.*

2. *Detta Γ la conica sezione di Q col piano $z = 1$ determinare e studiare le quadriche che contengono Γ ed hanno Q come cono circoscritto lungo Γ.*

1. Sia α di equazione $x - y + \lambda z = 0$, si consideri il fascio di piani contenente r; esso ha equazione $x - z + \mu y = 0$. Imponendo che i due piani siano ortogonali si ha che $\mu = 1 - \lambda$. Allora la retta t si ottiene come intersezione di α e del piano per r ortogonale ad α. Ne segue che t è data da $\begin{cases} x - y + \lambda z = 0 \\ x - z + (1 - \lambda) y = 0. \end{cases}$ Eliminando λ si ottiene la quadrica luogo Q, la

cui equazione è: $xz-z^2+yz-y^2+xy=0$. Poichè l'equazione trovata è una equazione *omogenea* la quadrica trovata è un cono con vertice nell'origine delle coordinate.

2. La conica Γ ha equazioni

$$\begin{cases} z=1 \\ xy-y^2+x+y-1=0. \end{cases}$$

La generica quadrica contenente Γ ha equazione

$$(z-1)(ax+by+cz+d)+xy-y^2+x+y-1=0$$

Se si vuole che il cono Q sia circoscritto alla generica quadrica lungo Γ deve accadere che il piano polare del vertice di Q sia proprio il piano $z=1$. Facendo i calcoli si trova che l'equazione di tale piano polare è

$$(1-a)x+(1-b)y+(d-c)z-2-2d=0$$

Identificando tale equazione con $z=1$ si trova che $a=1,\ b=1,\ c=-d-2$. Quindi le quadriche richieste hanno equazione:

$$xy+xz-y^2+yz+(-d-2)z^2+2(d+1)z-d-1=0$$

La matrice B di tali quadriche è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -d-2 & d+1 \\ 0 & 0 & d+1 & -d-1 \end{pmatrix}$$

Un semplice calcolo mostra che $|B|=-3/4(d+1)$, mentre $|A|=1/4(d+4)$. In conclusione possiamo dire che le quadriche sono a punti iperbolici per $d<-1$ e a punti ellittici per $d>-1$.
Per $d=-4$ si ha un paraboloide iperbolico.
Per $d>-1$ le quadriche sono tutte iperboloidi ellittici.

Esempio 31 *1. Trovare le equazioni dell'iperbole equilatera $\mathcal{C}$ del piano $z=0$ di cui $x+y=0$ è un asintoto e tale che la retta $x-y-2=0$ sia la polare di $(0,1,0,1)$, rispetto a $\mathcal{C}$.*

2. *Detta* c *la conica spezzata nelle due tangenti condotte dall'origine O alla iperbole $\mathcal{C}$, trovare l'equazione della generica quadrica Q contenente* d *e tale che la sua sezione col piano $x = y$ si proietta su $\vec{x}\vec{z}$ nella conica $y = 0,\ 4x^2 + z^2 + z = 0$.*

3. *Studiare le quadriche così trovate.*

1. Lavoriamo nel piano $z = 0$. Visto che l'iperbole cercata dev'essere equilatera e $x + y = 0$ dev'essere un asintoto, l'altro asintoto dev'essere ad esso ortogonale, quindi la nostra iperbole deve appartenere al fascio di equazione:

$$(x + y)(x - y + 2d) + \lambda t^2 = 0.$$

La polare del punto $(0, 1, 1)$ ha equazione $dx + (d - 1)y + d + \lambda = 0$ e perché sia la retta $x - y - 2 = 0$ dev'essere

$$\begin{cases} d = \rho \\ d - 1 = -\rho \\ d + \lambda = -2\rho \end{cases}$$

da cui si deduce $d = 1/2$ e $\lambda = -3/2$. L'iperbole cercata ha quindi equazione $2x^2 - 2y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$.

2. La conica c spezzata nelle due tangenti dall'origine O alla iperbole è la conica, passante per O, del fascio individuato dalla iperbole e dalla polare di O contata due volte.
Quindi si consideri il fascio

$$2x^2 - 2y^2 + 2x + 2y - 3 + \lambda(x + y - 3)^2 = 0$$

e si imponga ad esso di passare per O. Si trova subito $7x^2 - 5y^2 + 2xy = 0$. Adesso si considera la generica quadrica contenente la conica d trovata. L'equazione è data da

$$z(ax + by + cz + d) + 7x^2 - 5y^2 + 2xy = 0$$

Secando la precedente col piano $x = y$ si ottiene una conica del piano $x = y$. Per proiettare tale conica sezione, parallelamente all'asse $\vec{y}$ sul piano $y = 0$ basta secare col piano $y = 0$ il cilindro contenente la conica con generatrici parallele all'asse $\vec{y}$ che si ottiene eliminando la y dal sistema

$$\begin{cases} z(ax + by + cz + d) + 7x^2 - 5y^2 + 2xy = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Si ottiene la conica

$$\begin{cases} z(ax+bx+cz+d)+4x^2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Imponendo che essa sia la conica $y=0,\ 4x^2+z^2+z=0$ si deducono i valori $a+b=0,\ c=d=1$.

L'equazione della generica quadrica è:

$$axz-ayz+z^2+z+7x^2-5y^2+2xy=0.$$

Secando col piano $z=0$ si deduce subito che l'origine O è un punto iperbolico e quindi le quadriche sono a tutte a punti iperbolici; inoltre il $det(A)\neq 0$ per ogni $a\in \mathbb{R}$; si deduce che le quadriche sono tutte iperboloidi iperbolici.

Esempio 32 *1. Determinare l'equazione del cono Q di vertice $V=(1,0,0)$, tangente in O all'asse $\vec{y}$ e passante per i punti: $A=(1,0-1),\ B=(0,1,-1),\ e\ C=(0,-1,-1)$.*

2. Detta Γ la conica intersezione del cono Q trovato col piano di equazione $x=0$, determinare e studiare le quadriche $\mathcal{Q}$ aventi come cono circoscritto lungo Γ il cono di vertice V e direttrice Γ.

3. Determinare i piani del tipo $z=mx$ che secano in parabole le quadriche a punti ellittici di $\mathcal{Q}$.

1. Per la proprietà del vertice il cono Q deve contenere le rette VO, VA e VB. Allora il cono dovrà contenere la conica spezzata nelle rette: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y=0 \\ x-1=0 \end{cases}$ e quindi la sua equazione deve essere del tipo:

$$y(ax+by+cz+d)+z(x-1)=0$$

Le equazioni della retta VB sono: $\begin{cases} x-1=z \\ y=-z. \end{cases}$ Imponendo che la quadrica contenga tale retta deve accadere che la risolvente il sistema dev'essere una identità. Si deduce subito che dev'essere: $\begin{cases} a-b+c-1=0 \\ a+d=0. \end{cases}$

Imponendo alla quadrica il passaggio per C e che l'asse $\vec{y}$ sia tangente in O si ha: $\begin{cases} d=0 \\ b+c-d+1=0 \end{cases}$

In definitiva il cono ha equazione: $y^2 - xz + z = 0$.

2. La conica Γ è quindi data dal sistema: $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z = 0. \end{cases}$

Le quadriche di $\mathcal{Q}$ devono contenenere Γ. Quindi la loro equazione è del tipo:

$$x(ax + by + cz + d) + y^2 + z = 0$$

Perché tali quadriche abbiano Q come cono circoscritto lungo Γ deve accadere che il piano polare di V, rispetto alla generica quadrica di $\mathcal{Q}$, sia proprio il piano $x = 0$. Si trova subito che tale piano polare ha equazione:

$$(2a + d)x + by + (c + 1)z + d = 0.$$

Segue che dev'essere: $b = 0,\ c = -1,\ d = 0$. Quindi le quadriche $\mathcal{Q}$ hanno equazione: $ax^2 - xz + y^2 + z = 0$. Un semplice calcolo prova che la C_∞ è sempre irriducibile. Inoltre per $a > 0$ si hanno quadriche a punti ellittici. Per $a < 0$ quadriche a punti iperbolici.

3. Supposto allora $a > 0$ si cercano i punti impropri della conica sezione della generica quadrica di $\mathcal{Q}$ e del piano $z = mx$. Si ha il sistema:

$$\begin{cases} z = mx \\ ax^2 - xz + y^2 + zt = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che per avere punti impropri coincidenti dev'essere $m = a$. In conclusione i piani che secano le quadriche a punti ellittici di $\mathcal{Q}$ in parabole sono tutti e soli quelli del tipo $z = ax$.