

# Ingegneria Edile-Architettura (A-L)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 6 Luglio 2010

---

*Durata della prova: tre ore.*

*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*

*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.*

*Si possono consultare i libri di testo.*

---

## I

Dati i vettori di  $\mathbb{R}^3$   $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$  e  $v_3 = (1, 0, 0)$ , sia  $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$  la base di  $\mathbb{R}^3$  da essi individuata. Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo avente come matrice associata rispetto alla base  $\mathcal{A}$  la matrice:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

- 1) Studiare l'applicazione lineare  $f$  al variare del parametro reale  $h$ , determinando, in ciascun caso,  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$ .
- 2) Dato  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ , determinare  $f(V)$  al variare di  $h$ , specificandone, in ciascun caso, la dimensione.
- 3) Studiare la semplicità di  $f$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .
- 4) Nel caso  $h = 0$ , calcolare una matrice associata all'endomorfismo  $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

## II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$ .

- 1) Data la retta:

$$r : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

e dato il punto  $P = (-1, 3, 0)$ , determinare la retta ortogonale e incidente  $r$  e passante per  $P$ . Determinare la distanza di  $P$  da  $r$ .

- 2) Studiare il fascio di coniche del piano  $z = 0$  di equazione:

$$2x^2 + (h - 3)xy + y^2 + (1 - h)x - 1 = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

- 3) Determinare il paraboloide contenente la conica di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e passante per i punti  $(0, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 1)$  e  $(-1, 0, 1)$ . Determinare la natura del paraboloide.