CdL in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria**- 22 Febbraio 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
Si possono consultare solo i libri di testo.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2,2}$ si consideri il sottoinsieme:

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \colon {}^{t}A = A,\ \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

1) Dopo avere verificato che V è sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$, determinare la sua dimensione e una base.

2) Determinare il generico endomorfismo $f \colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ tale che:

    1. $\mathrm{Ker}\, f = V$;
    2. $\mathrm{Im}\, f = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$;
    3. la matrice identica sia autovettore associato all'autovalore 2.

3) Studiare la semplicità del generico endomorfismo f e determinare una base di autovettori dell'endomorfismo avente due autospazi di dimensione 2.

4) Posto $g \colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ l'endomorfismo così definito:

$$g\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   determinare una matrice associata a $g \circ f$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Detta r la generica retta per O, determinare il piano π passante per $A = (1, 0, 0)$ e perpendicolare a r.

2) Determinare la quadrica Q luogo dei punti $P = \pi \cap r$ al variare di r.

3) Verificare che la sezione Γ di Q con il piano $\pi \colon x - y + z = 0$ è una circonferenza reale e determinare il suo centro e il suo raggio.

4) Detta Γ' la proiezione ortogonale di Γ sul piano $y = 0$, determinare e studiare la generica quadrica contenente Γ e Γ'.