FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Elettronica-Vecchio Ordinamento**

Risoluzione della prova scritta di Geometria assegnata il 18/05/2002

I

È assegnato nello spazio un sistema di rif. cart. ortog. $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

1\. – Determinare e studiare il fascio Φ di coniche, del piano coordinato $z = 0$, passanti per $A \equiv (1, 1, 0, 1)$, $B \equiv (-1, 1, 0, 1)$ e tangenti all'asse $\vec{x}$ in O .

Risoluzione

Il fascio Φ si può determinare facendo combinazione lineare delle seguenti due coniche: la prima quella spezzata nella tangente in O e nella congiungente AB e l'altra spezzata nelle due rette OA e OB.

Le coniche spezzate e i punti base sono ovvi.

Si hanno coniche irriducibili per $\lambda \neq 0$, e poi si ha una **parabola** per $\lambda = 1$, **ellissi** per $\lambda > 1$ e **iperboli** per $\lambda < 1$.

2\. – Nella polarità piana, determinata dalla generica conica :

$$\gamma : \qquad \{ \ z = 0, \quad x^2 - y^2 + \ \lambda \ y \ (y - 1) = 0 \ \}$$

si determinino la polare p del punto $P \equiv (0, 2, 0, 1)$ e il polo R della retta : $z = 0$; $2x + y = 0$.

Si studi la conica Γ luogo dei punti comuni a p ed alla retta PR , al variare di $\gamma \in \Phi$.

Risoluzione

La polare di $P = (0, 2)$ si calcola con la formula:

$$(0, 2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dopo semplici calcoli si ottiene la retta: $(3y - 2)\lambda = 4y$.

Intanto osserviamo che stiamo lavorando sul piano $z = 0$, e che quando si scrive la formula della polare di un punto, le coordinate del punto si devono scrivere in coordinate omogenee. Nasce da questo che le coordinate del punto P sono state scritte $(0, 2, 1)$.

Ora troviamo la polare del generico punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Usando la formula

$$(x_0, y_0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

In tal caso si ottiene: $\quad (1) \quad x_0 x + [(\lambda-1)y_0 - \frac{\lambda}{2}]y - \frac{\lambda}{2}\, y_0 = 0.$
Noi vogliamo che tale polare sia la retta di equazione $2x + y = 0$. Perchè le due equazioni rappresentino la stessa retta devono avere i coefficienti proporzionali. Quindi

$$\begin{cases} x_0 = 2\rho \\ y_0 = 0 \\ -\frac{\lambda}{2} = \rho \end{cases}$$

La seconda del sistema deriva dall'aver posto il termine noto di (1) uguale a zero. E poichè $\lambda \neq 0$ si ha $y = 0$.
Adesso scriviamo l'equazione della retta che congiunge $P = (0,2)$ ed $R = (-\lambda, 0)$. Si ha : $2x - \lambda y + 2\lambda = 0$. Il luogo descritto dal punto comune alle due rette p e PR si ottiene eliminando λ dal sistema delle loro equazioni

$$\begin{cases} (3\lambda-4)y - 2\lambda &= 0 \\ 2x - \lambda y + 2\lambda &= 0 \end{cases}$$

Dopo semplici calcoli si ottiene il luogo Γ: $(3x-2y)y - 2x + 4y = 0$. Tale luogo è una iperbole che è facile studiare in dettaglio.

3. – Si determini l'equazione del cilindro $\mathcal{Q}$ avente le generatrici parallele alla retta: $\underline{r}\ \ x = y = -z$ e come direttrice la conica :

$$(3x-2y)\,y - 2x + 4y = 0 \ \ ,\ z = 0\ .$$

Risoluzione

Il punto generico della conica ha coordinate $G_0 = (x_0, y_0, 0)$, soddisfacenti la condizione di appartenenza $3x_0y_0 - 2y_0^2 - 2x_0 + 4y_0 = 0$. Il cilindro richiesto è generato dalle rette per il punto G_0 e parallele alle retta $x = y = -z$. Le equazioni delle generatrici sono:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Da cui $x_0 = x + z; \quad y_0 = y + z$. Sostituendo tali valori nell'equazione di condizione si ha:

$$3(x+z)(y+z) - 2(y+z)^2 - 2(x+z) + 4(y+z) = 0$$

II

1. – Determinare il generico endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che :
a)- l'asse $\vec{x}$ sia l'autospazio associato all'autovalore $h \in \mathbb{R}$;
b)- la retta $W = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = z\ \}$ sia l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 2$;

c)- la retta $V = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ y = x - z = 0\ \}$ non sia un autospazio di f e la sua immagine $f(V)$ sia la generica retta del fascio Ψ :

$$\begin{cases} y &= 0 \\ x &= az \end{cases}$$

Studiare la semplicità di f al variare della molteplicità degli autovalori e nei casi in cui f è semplice determinare una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione In base a quanto richiesto dev'essere

$$\begin{cases} f(1,0,0) &= h(1,0,0) \\ f(1,1,1) &= 2(1,1,1) \\ f(1,0,1) &= (a,0,1) \end{cases}$$

Scriviamo la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,1),(1,0,1)$, cioè $M(f)^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$. Sulle colonne si devono scrivere ordinatamente le componenti di $f(1,0,0)$, $f(1,1,1)$ e $f(1,0,1)$, rispetto alla base $\mathcal{B}$. Si ottiene

$$A = M(f)^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} h & 0 & a-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'ultima colonna della matrice sono le componenti del vettore $f(1,0,1) = (a,0,1)$, rispetto alla base $\mathcal{B}$. La matrice caratteristica è

$$\begin{pmatrix} h-T & 0 & a-1 \\ 0 & 2-T & 0 \\ 0 & 0 & 1-T \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $T = 1, \quad T = 2, \quad T = h$.
Quindi per $h \neq 1, 2$ l'endomorfismo è semplice.
Vediamo i casi particolari.
Per $h = 1$ L'autovalore $T = 1$ è doppio. La matrice caratteristica diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Perchè l'endomorfismo sia semplice il suo rango dev'essere uguale a 1. Ciò si ha per $a = 1$. Tale soluzione non è accettabile perchè in tal caso V sarebbe un autospazio, contro quanto richiesto.

Per $h = 2$, si ha l'autovalore $T = 2$ doppio e la matrice caratteristica diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha sempre rango 1, qualunque sia a; ne segue che per $h = 2$ l'endomorfismo è sempre semplice.
In conclusione l'endomorfismo è sempre semplice tranne che per $h = 1$.
La base di autovettori si ottiene dal sistema

$$(A - \lambda I)\underline{X} = \underline{0}$$

ed è lasciata per esercizio allo studente.

2. – Siano : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, $\mathcal{F}$ una base di $\mathbb{R}^3$,
Dette $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ le componenti, rispetto a $\mathcal{F}$, dei vettori v e w
i) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'applicazione $\bullet$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ così definita :

$$v \bullet w = {}^t\underline{X}\ A\ \underline{Y}$$

è un prodotto scalare.
In particolare, per $k = 2$:
ii) determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, rispetto a $\bullet$;
iii) determinare l'ortogonale $W^\perp$, rispetto a $\bullet$, del sottospazio minimo $W \in \mathbb{R}^3$ contenente il
sottoinsieme $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 1 \ , \ x_2 = -2 \ \}$.

Risoluzione

Osserviamo che perchè una forma bilineare del tipo considerato definisca un prodotto scalare la matrice associata dev'essere simmetrica e la forma quadratica associata dev'essere definita positiva. Perchè ciò accada i determinanti dei minori principali della matrice devono essere positivi.
Si deduce $k > 1$. Quindi per $k = 2$ si ha un prodotto scalare.
Partendo dal vettore $(1, 0, 0)$ si ha che tutti i vettori ad esso ortogonali si trovano dal porre:

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Si ottiene $(x, -x, z)$. Quindi il vettore $(0, 0, 1)$ è ortogonale a $(1, 0, 0)$. Ora è facile vedere che il vettore $(x, -x, 0)$ è ortogonale a $(0, 0, 1)$, per ogni x. Quindi $(1, -1, 0)$ è un vettore ortogonale a entrambi.
Quindi come base ortogonale si può scegliere: $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 0)$.

Il sottospazio minimo W contenente $S = (1, -2, x_3)$ è dato da $\rho(1, -2, x_3)$. Una sua base è : $v_1 = (1, -2, 0)$; $v_2 = (1, -2, 1)$. Il generico vettore (x, y, z) ortogonale ad entrambi v_1 e v_2 si ottiene da

$$(1,-2,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

da cui $x + 3y = 0$. Analogamente si trova $z = 0$. In definitiva l'ortogonale è $z = 0; x + 3y = 0$