

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura e Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** assegnata il 9/09/05

I

a) Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

Si consideri nel piano $z = 0$ il fascio di coniche tangenti alla retta $x + y + 2 = 0$ nel punto $A = (-1, -1)$, e passanti per $B = (0, -1)$ e $C = (-1, 0)$.

1. Caratterizzare le coniche del fascio.
2. Dopo aver trovato la conica γ del fascio avente l'origine O del riferimento come centro di simmetria, trovare una sua forma canonica ed il relativo cambiamento di coordinate.
3. Trovare il cono di vertice $V = (1, -1, -1)$ e direttrice γ .

Risoluzione

1. Il fascio si può individuare mediante le coniche spezzate nelle rette $AB \cdot AC$ e nella tangente $x + y + 2 = 0$ moltiplicata la retta BC . Quindi l'equazione del fascio è

$$(x + y + 2)(x + y + 1) + \lambda(x + 1)(y + 1) = 0$$

Sviluppando l'equazione si ha

$$x^2 + y^2 + (\lambda + 2)xy + (\lambda + 3)x + (\lambda + 3)y + \lambda + 2 = 0$$

La matrice della conica è $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda+2}{2} & \frac{\lambda+3}{2} \\ \frac{\lambda+2}{2} & 1 & \frac{\lambda+3}{2} \\ \frac{\lambda+3}{2} & \frac{\lambda+3}{2} & \lambda+2 \end{pmatrix}$. La sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda+2}{2} \\ \frac{\lambda+2}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Ovviamente non ha senso andare a calcolare il determinante di B , perchè conosciamo coniche spezzate e punti base, mentre $|A| = 1 - \left(\frac{\lambda+2}{2}\right)^2 = \frac{-\lambda^2-4\lambda}{4}$.

Quindi si hanno: **ellissi** per $|A| > 0$ cioè per $-4 < \lambda < 0$; **parabole** per i valori di λ tali che $|A| = 0$ ma $|B| \neq 0$; cioè per $\lambda = -4$; **iperboli** per $\lambda < -4$ e $\lambda > 0$.

2. Ricordando che il centro si trova dal sistema $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{13} = 0 \end{cases}$, nel nostro caso

deve accadere che il sistema $\begin{cases} x + \frac{\lambda+2}{2}y + \frac{\lambda+3}{2} = 0 \\ \frac{\lambda+2}{2}x + y + \frac{\lambda+3}{2} = 0 \end{cases}$ deve essere soddisfatto da $x = 0$ e

$y = 0$. Ciò si verifica per $\lambda = -3$. Quindi la conica da studiare è $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$. In tal caso $|B| = -\frac{3}{4}$; $|A| = \frac{3}{4}$. Si avrà una forma canonica del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$,

dove gli autovalori α e β si trovano dal polinomio caratteristico $\begin{vmatrix} 1-T & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-T \end{vmatrix} = 0$. Si trova, per esempio, $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{3}{2}$. Facendo uso degli invarianti ortogonali si calcola anche $\gamma = 1$.

Quindi una forma canonica è $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{3} = 1$. Il cambiamento di coordinate è dato da una rotazione di $\frac{\pi}{4}$.

3. Le equazioni della direttrice γ sono $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$. Un punto generico G su γ ha coordinate $G = (\alpha, \beta, 0)$, con la condizione $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - 1 = 0$. La retta generica VG ha equazioni $\frac{x-1}{\alpha-1} = \frac{y+1}{\beta+1} = z+1$. Da questa si ricavano $\alpha = \frac{x+z}{z+1}$, $\beta = \frac{y-z}{z+1}$. Sostituendo i valori di α e β nell'equazione di condizione si ottiene l'equazione del cono. Sviluppando i calcoli si ha:

$$x^2 - xy + 3xz + y^2 - 3yz + 2z^2 - 2z - 1 = 0$$

II

Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio euclideo col prodotto scalare usuale.

Determinare il generico endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ **semplice**, avente $v_1 = (1, 0, 1)$ come autovettore associato all'autovalore **doppio** $T = 2K$.

Inoltre si sa che gli autovettori sono a due a due ortogonali e che $\text{Ker}(f) \neq \{O_{\mathbb{R}^3}\}$.

b) Dopo avere trovato la matrice $A = M^{E,E}(f)$ rispetto alle basi canoniche, studiare f indicando, al variare di k , una base di $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.

c) Detta $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione

$$g(x, y, z) = (2x + y, 2y + 2kz, x + 2z)$$

studiare, al variare di k , il sottospazio $W = \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$.

Risoluzione

1. Sappiamo che una base di autovettori ortogonali è data dai vettori $v_1 = (1, 0, 1); v_2 = (0, 1, 0); v_3 = (1, 0, -1)$. Poichè l'autovalore $T = 2K$ è doppio e v_1 è un autovettore associato dovrà essere $f(v_1) = 2Kv_1; f(v_2) = 2Kv_2$ oppure $f(v_3) = 2Kv_3$.

Operiamo la prima scelta; allora visto che il nucleo dell'endomorfismo è non nullo dovrà esserci l'autovalore nullo. Quindi è ovvio che $f(v_3) = (0, 0, 0)$. Ne segue che l'endomorfismo è definito da :

$$f(1, 0, 1) = (2K, 0, 2K); \quad f(0, 1, 0) = (0, 2K, 0); \quad f(1, 0, -1) = (0, 0, 0).$$

Se si fosse operata la seconda scelta si sarebbe proceduto in modo analogo.

2. Quindi, nel primo caso, la matrice A associata rispetto alle basi canoniche è data $\begin{pmatrix} K & 0 & K \\ 0 & 2K & 0 \\ K & 0 & K \end{pmatrix}$.

Per $K = 0$ A diventa la matrice nulla e l'applicazione è l'applicazione nulla, che ha come immagine lo zero di $\mathbb{R}^3$ e come nucleo tutto $\mathbb{R}^3$.

Se invece $K \neq 0$, riducendo la matrice si ha $\begin{pmatrix} K & 0 & K \\ 0 & 2K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha rango 2 e

quindi la dimensione di $\text{Im}(f)$ è 2. Una base dell'immagine è data da $(1, 0, 1); (0, 1, 0)$. Il nucleo è dato da $(1, 0, -1)$.

3. La matrice associata a g , rispetto alle basi canoniche, è $M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2K & 2 \end{pmatrix}$. Si vede

subito che il suo rango è 3 per $K \neq -4$. Mentre per $K = -4$ il rango è due.

Bisogna distinguere vari casi:

Per $K \neq 0, -4$, l'immagine di f è definita dall'equazione $x - z = 0$, che si ricava calcolando le relazioni definite dallo spazio delle colonne della matrice associata ad f , mentre la g è suriettiva.

In tal caso l' intersezione delle immagini è data da $x - z = 0$.

Per $K = 0$, la prima applicazione è l' applicazione nulla, quindi in questo caso l'intersezione delle immagini è data dalla immagine di g .

Se invece $K = -4$, l' immagine di f ha equazione $x - z = 0$, mentre l' immagine di g si ottiene calcolando le equazioni omogenee dello spazio generato dalle colonne di $M(g)$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ x & y & z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & y & z - 2x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & z - 2x + 4y \end{pmatrix}$$

In definitiva l' intersezione delle immagini è data dal sistema $\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - 4y - z = 0 \end{cases}$