FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 16/02/09

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

1. Si considerino le rette
$$r \begin{cases} x-1=0 \\ y+z=0 \end{cases} \quad s \begin{cases} y+2=0 \\ x+z=0 \end{cases}.$$
Detto $G=(0,0,h)$ il generico punto dell' asse $\vec{z}$, si consideri la retta g passante per G e complanare tanto ad r che ad s.
Determinare e studiare la quadrica Q descritta dalla retta g al variare di G sull' asse $\vec{z}$.

2. Si considerino le due coniche
$$\gamma_1 \begin{cases} z=0 \\ 2x^2+y^2+2y-2x=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_2 \begin{cases} y=0 \\ x^2+xz-x=0. \end{cases}$$
Determinare e studiare la famiglia di quadriche contenenti γ_1 e γ_2.

3. Trovare l' equazione del cilindro avente come direttrice γ_1 e generatrici parallele alla retta di equazioni $x=y=-z$.

Risoluzione

1. La generica retta g si può ottenere come intersezione del piano contenente r e passante per G e del piano contenente s e passante per G. Imponiamo al fascio di piani avente per asse r: $x-1+\lambda(y+z)=0$ di passare per G. Si ottiene il piano π_1: $h(x-1)+(y+z)=0$. Poi si impone al fascio di piani avente per asse s: $y+2+\mu(x+z)=0$ di passare per G. Si ottiene il piano π_2: $h(y+2)-2(x+z)=0$. La retta g è la intersezione dei due piani π_1 e π_2. Il luogo descritto da g si ottiene eliminando il parametro h dal sistema $\begin{cases} h(x-1)+(y+z)=0 \\ h(y+2)-2(x+z)=0 \end{cases}$. Si ottiene la quadrica di equazione: $2x^2+y^2+2xz+yz-2x+2y=0$, che è facile vedere che è un **iperboloide iperbolico**.

2. La più generale quadrica contenente γ_1 ha equazione
$$z(ax+by+cz+d)+2x^2+y^2+2y-2x=0. \tag{1}$$
Perché tale quadrica contenga γ_2 deve accadere che secando la sua equazione col piano $y=0$ si ottenga un residuo proporzionale a $x^2+xz-x=0$. Secando la (1) con $y=0$ si ottiene: $axz+cz^2+dz+2x^2-2x=0$. Deve quindi essere $a=2$; $b=b$; $c=0$; $d=0$. La famiglia richiesta ha equazione
$$z(2x+by)+2x^2+y^2-2x+2y=0 \tag{2}$$
La matrice B della generica quadrica (2) è
$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
E' immediato vedere che $|A|=-1-\frac{b^2}{2}$ e che $|B|=(1+\frac{b}{2})^2$.
Per $b=-2$ si ha un **cono**.
Per $b\neq -2$ si hanno sempre **iperboloidi iperbolici**.

3. Sia $G = (\alpha, \beta, 0)$ un punto generico su γ_1. Quindi deve essere $2\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta - 2\alpha = 0$. Le equazioni della retta passante per G parallela alla retta data sono: $x - \alpha = y - \beta = -z$. L'equazione del cilindro richiesto si trova sostituendo $\alpha = x + z$; $\beta = y + z$ nell' equazione di condizione. Si ottiene:

$$2(x + z)^2 + (y + z)^2 + 2(y + z) - 2(x + z) = 0$$

II

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, associato, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -h & h-1 & -h-1 & h \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Studiare, al variare di h, l' endomorfismo f determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.

2. Detti $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 1)$, dopo avere determinato le equazioni cartesiane del sottospazio $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, provare che $f(v_1),\ f(v_2),\ f(v_3) \in V$. Ciò implica che la restrizione di f a V induce un endomorfismo $f' : V \to V$. Studiare la semplicità di f'.

3. Determinare il sottospazio $W = \left\{ w \in \mathbb{R}^4 | w \bullet v = 0, \text{per ogni } v \in V \right\}$. Esistono valori di h per cui la restrizione di f a W sia un endomorfismo?

Risoluzione

1. Riduciamo per righe la matrice, con le seguenti sostituzioni: $(R_2 \leftrightarrow R_2 - R_1)$; $(R_3 \leftrightarrow R_3 - hR_1)$. Si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ -2h & -1 & -6h-1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Con gli ulteriori scambi:
$(R_2 \leftrightarrow R_3)$ e $R_4 \leftrightarrow R_4 - R_2$ ed infine, nella matrice trovata, $R_4 \leftrightarrow R_4 + (2h + 1)R_3$ si ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ -2h & -1 & -6h-1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2h & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice è ridotta per righe; essa ha rango 4 per $h \neq 0$ ed in tal caso la nostra applicazione lineare è un isomorfismo.
Per $h = 0$ il rango è 3. La dimensione dell' immagine è 3 e una base è data dalle colonne I, II e IV della matrice data, ponendo in essa $h = 0$.
Il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo costruito sull' ultima matrice ridotta per righe. Si trova che la generica soluzione è $(-4z, -z, z, 0)$. Quindi come base del nucleo si può prendere $(4, 1, -1, 0)$.

2. Per trovare le equazioni cartesiane del sottospazio generato da v_1, v_2, v_3 consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$ ed imponiamo che per l' aggiunta della quarta riga il rango

della matrice non aumenti. Riducendo per righe si ottiene $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ x-y+z-t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Perché il rango della matrice non aumenti si deve porre $x-y+z-t=0$, che è l' equazione cartesiana del sottospazio $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3.
Utilizzando la matrice associata $A = M(f)$ si trova che

$$f(1,1,0,0) = (2,1,-1,0); \quad f(-1,0,1,0) = (4,1,-1,2); \quad f(1,0,0,1) = (2,1,0,1)$$

e tutte le immagini verificano la relazione $x-y+z-t=0$ e quindi appartengono al sottospazio V. Ciò è sufficiente per dire che la f induce un endomorfismo f' su V.
Per studiare la semplicità troviamo la matrice associata ad f', rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Bisogna considerare la matrice avente ordinatamente per colonne le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, delle immagini $f(v_1),\ f(v_2),\ f(v_3)$.
Detto (a,b,c,d) un generico vettore di $\mathbb{R}^4$ calcoliamo le sue componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, Si ha $(a,b,c,d) = x_1(1,1,0,0) + x_2(-1,0,1,0) + x_3(1,0,0,1)$. Identificando le componenti si ha: $x_1 = b$; $x_2 = c$; $x_3 = d$; dalla identificazione della I componente si trova la relazione che definisce V. Da ciò si deduce la matrice associata ad f' rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia nel dominio che nel codominio. Da semplici calcoli si ha: $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calcoliamo il polinomio caratteristico $\begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ -1 & -1-T & 0 \\ 0 & 2 & 1-T \end{vmatrix}$. Da semplici calcoli si ottiene che $P(T) = -(1+T)[(1-T)^2+1]$. Si ha l' autovalore $T=-1$ e gli altri due autovalori sono complessi. Quindi il nostro endomorfismo **non è semplice**.

3. Perché un vettore w sia ortogonale ad ogni vettore di V basta imporre che sia ortogonale ad ogni vettore di una base di V. Quindi detto $w = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ deve accadere che sia nulli tutti i prodotti scalari:
$$\begin{cases} x+y=0 \\ -x+z=0 \\ x+t=0 \end{cases}$$
Si trova che il generico vettore $w = (x,-x,x,-x)$; quindi W ha come base $(1,-1,1,-1)$. Calcoliamo $f(1,-1,1,-1) = (4,-1,-4h,-1)$. Per nessun valore di h l' immagine soddisfa la condizione di appartenza a W.