**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura**

**Prova** scritta di **Geometria** assegnata il 02/07/04

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u.$

1. Nel piano $z = 0$ studiare, al variare di $h$, il fascio di coniche:

$$(h+1)x^2 + (h+1)y^2 + 2(1-h)xy - 2x - 2y + 1 - h = 0.$$

**Risoluzione**
Il fascio si può scrivere nella forma

$$h(x^2 + y^2 - 2xy - 1) + (x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1) = 0$$

cioè anche

$$h[(x-y)^2 - 1] + (x+y-1)^2 = 0$$

Si vede subito che le due coniche che formano il fascio sono entrambe spezzate. Rispettivamente nelle rette $(x-y-1)(x-y+1) = 0$ e $(x-y-1)^2 = 0$. In effetti scrivendo la matrice $B$ della conica: $B = \begin{pmatrix} h+1 & 1-h & -1 \\ 1-h & h+1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-h \end{pmatrix}$, si vede che $|B| = 0$ se e solo se $h = 0$. Una delle coniche spezzate è quella la cui equazione è a fattore del parametro $h$. I punti base si trovano dai sistemi $\begin{cases} x-y+1 & = 0 \\ x+y-1 & = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x-y-1 & = 0 \\ x+y-1 & = 0 \end{cases}$, che hanno come soluzioni i punti $A = (0,1)$ e $B = (1,0)$, ciascuno contato due volte perchè si ottiene un fascio di coniche bitangenti.
Calcoliamo $|A| = 4h$. Quindi per $h > 0$ si hanno ellissi; per $h < 0$ si hanno iperboli.
Nel fascio non ci sono parabole, perchè il valore di $h$ che annulla $|A|$ annulla anche $|B|$.

2. Determinare l'iperbole equilatera del precedente fascio. Trovare una sua forma canonica e il cambiamento di coordinate che l'ha determinata.
**Risoluzione**
Calcoliamo la traccia di $A$. Si ha $Tr(A) = 0$ per $h = -1$. Quindi l'iperbole ha equazione

$$2xy - x - y + 1 = 0$$

Si vede subito che $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. $|B| = -\frac{1}{2}$; $|A| - 1$; il polinomio caratteristico è $|A - TI| = \begin{vmatrix} -T & 1 \\ 1 & -T \end{vmatrix} = 0$.Gli autovalori sono $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Inltre, usando gli invarianti ortogonali si deduce $-\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{2}$; $\alpha\beta = -1$, quindi $\gamma = -\frac{1}{2}$.
In definitiva una forma canonica è $-X^2 + Y^2 = -\frac{1}{2}$. Il centro di simmetria della iperbole è $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. L'autospazio $V_\alpha$ ha equazione $x + y = 0$; mentre l'autospazio $V_\beta$ ha equazione $x - y = 0$. In definitiva gli assi di simmetria sono le rette per il centro parallele agli autospazi. Visto poi che i punti impropri dell'iperbole sono $X_\infty = (1,0,0)$ e $Y_\infty = (0,1,0)$, gli asintoti sono le rette passanti per il centro di simmetria $C$ parallele agli assi.
Con tali elementi è possibile disegnare il grafico dell'iperbole.

3. Detta $c$ la circonferenza del fascio, trovare il cilindro con direttrice $c$ e generatrici parallele alla retta $r: \begin{cases} y & = 0 \\ x + z - 1 & = 0 \end{cases}$

**Risoluzione**

Per $h = 1$ si ottiene la circonferenza del fascio. Le sue equazioni sono $\begin{cases} z & = 0 \\ x^2 + y^2 - x - y & = 0 \end{cases}$

Per trovare il cilindro richiesto, si consideri il punto $G = (\alpha, \beta, 0)$, appartenente alla circonferenza e pertanto tale che $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta = 0$. La retta $\begin{cases} y & = 0 \\ x + z - 1 & = 0 \end{cases}$ ha parametri direttori $(1, 0, -1)$. Quindi la retta per $G$ parallela ad $r$ ha equazioni $\begin{cases} x - \alpha & = -z \\ y & = \beta \end{cases}$ Da cui $\alpha = x + z$; $\beta = y$. Sostituendo nell'equazione di condizione si ha $(x + z)^2 + y^2 - x - z - y = 0$, che è l'equazione del cilindro richiesto.

## II

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f(0, 1, 1, 0) = (6, 2, -2, 2); \quad f(0, 0, 1, 1) = (6, 2, -1, 3);$$

$$f(1, 0, 0, 1) = (2, 1, 0, 1); \quad f(0, 0, 0, 1) = (1, 1, h, 0)$$

1. Studiare tale applicazione, al variare di $h$, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.

**Risoluzione**

Consideriamo la matrice associata ad $f$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ del dominio formata dai vettori $(0, 1, 1, 0)$; $(0, 0, 1, 1)$; $(1, 0, 0, 1)$; $(0, 0, 0, 1)$ e la base canonica del codominio. $M(f)^{\mathcal{C},E} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & h \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un semplice calcolo mostra che il determinante di tale matrice è nullo per $h = 0$. Quindi la nostra applicazione è un isomorfismo per $h \neq 0$, mentre per $h = 0$ esaminiamo direttamente.

La matrice diventa $M(f) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Adesso sottraendo dalla seconda la prima riga, poi addizionando alla quarta la seconda riga ed infine sottraendo dalla quarta la terza riga si ottiene la matrice ridotta seguente: $M' = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi una base dell'immagine si trova prendendo le prima tre colonne della matrice di partenza per $h = 0$, il nucleo risolvendo il sistema lineare omogeneo costruito sulla amtrice $M'$. Si trova la soluzione $(x, -2x, 4x, -2x)$. Quindi come base del nucleo si può prendere il vettore avente queste ultime come componenti rispetto alla base $\mathcal{C}$. Si ha $v = (4, 1, -1, 0)$.

2. Si consideri il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) | x - y + z - t = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Dopo aver trovato una base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $V$, verificare che $f(v_1), f(v_2), f(v_3) \in V$. Ciò significa che $f$ induce un endomorfismo $f' : V \to V$.

**Risoluzione**

La matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio è $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -h & h-1 & -h-1 & h \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Tenedo conto della relazione che definisce $V$ si ha che $x = y - z + t$; quindi una base per $V$ può essere $\mathcal{B} = (v_1 = (1,1,0,0);\ v_2 = (-1,0,1,0);\ v_3 = (1,0,0,1))$. Utilizziamo la matrice $M(f)$ per calcolare $f(v_1);\ f(v_2);\ f(v_3)$. Si ottiene $f(v_1) = (2,1,-1,0); f(v_2) = (4,1,-1,2);\ f(v_3) = (2,1,0,1)$. È facile verificare che tali immagini soddisfano la relazione che definisce $V$. Quindi come richiesto la nostra $f$ è un endomorfismo su $V$.

3. Dire se l' endomorfismo $f'$ è semplice o meno.
   **Risoluzione**
   Calcoliamo adesso le componenti di un vettore generico $(a,b,c,d)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Si ha $(a,b,c,d) = x(1,1,0,0) + y(-1,0,1,0) + z(1,0,0,1)$. Si ha facilmente $x = b;\ y = c;\ z = d$.
   In definitiva la matrice associata ad $f' : V \to V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico ha due autovalori complessi, e quindi l'endomorfismo non è semplice.