FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Risoluzione prova scritta di **Geometria** assegnata l' 11/04/2006

I

Si consideri l' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 1 \\ -h & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-h & 1 & 0 \\ h+1 & -2h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Detto $V_h = Ker(f)$ per $h \neq 0$ e $V_0 = Ker(f)$ per $h = 0$, provare che $V_h \not\subset V_0$, cioè V_h non è propriamente contenuto in V_0.
3. Provare che $W = Im(f)$, per $h \neq 0$, è indipendente da h. Ciò lo si può vedere trovando le relazioni lineari omogenee che definiscono $Im(f)$, per $h \neq 0$.
4. Per $h = 2$ verificare che $\overline{f} : W \to W$ non è un endomorfismo semplice.

Risoluzione

1. Riduciamo per righe la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 1 \\ -h & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-h & 1 & 0 \\ h+1 & -2h & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftrightarrow R_4 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 1 \\ -h & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-h & 1 & 0 \\ h & -h & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 1 \\ -h & 1 & 1 & 0 \\ h & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In conclusione, per $h = 0$ il rango della matrice è due. Quindi $dimIm(f) = 2$ e $dimKer(f) = 2$. Si vede facilmente che per $h = 0$ $Ker(f) = V_0$ si trova dal sistema $\begin{cases} x+t=0 \\ y+t=0 \end{cases}$.
Mentre per $h \neq 0$ la matrice ha rango tre. In tale caso il $Ker(f) = V_h$ si trova dal sistema $\begin{cases} y-hy+t=0 \\ z=hy-y \\ x=y \end{cases}$. Si deduce che il generico elemento è $(y, y, hy-y, hy-y)$.

2. Imponendo che tale elemento debba appartenere a V_0 si trova che deve essere soddisfatta la condizione $hy = 0$ che porta a $y = 0$. Quindi solo il vettore nullo di V_h appartiene a V_0, e quindi $V_h \not\subset V_0$.

3. Per $h \neq 0$ le colonne della matrice data generano l'immagine. La I,III e IV sono indipendenti; troviamo lo spazio generato da queste.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -h & 0 & h+1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -h & 0 & h \\ 0 & y & z & t-x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -h & 0 & h \\ 0 & y-z & 0 & t-x \end{pmatrix} \longrightarrow$$

Infine sottraendo alla quarta riga la terza moltiplicata per $\frac{y-z}{h}$ si ottiene la matrice ridotta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -h & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & t-x+y-z \end{pmatrix}$. Se vogliamo trovare il sottospazio W dobbiamo porre $x-y+z-t=0$, che è ovviamente indipendente da h.

4. Troviamo adesso una base del sottospazio W. Dalla relazione che lo definisce si deduce che $x = y - z + t$; quindi il generico vettore di W si può scrivere $(y - z + t, y, z, t)$. Una base di W è data da $v_1 = (1, 1, 0, 0)$; $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$; $v_3 = (1, 0, 0, 1)$.
   Poniamo adesso $h = 2$, come dice il testo del compito. La matrice associata ad f diventa $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Un semplice calcolo permette di dire che le componenti del generico vettore (a, b, c, d) nella base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ sono ordinatamente (b, c, d). Quindi calcolando $f(v_1); f(v_2); f(v_3)$, si trova la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia nel dominio V che nel codominio V. Per calcolare $f(v_1)$ basta moltiplicare $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per il vettore colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si ottiene $f(v_1) = (-1, -1, -1, -1)$. Le componenti del vettore immagine rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(-1, -1, -1)$. Si ripete la stessa cosa per $f(v_2)$ ed $f(v_3)$. In definitiva la matrice associata a $\overline{f}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è $M(F)^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Si calcola la matrice caratteristica e si ottiene $\begin{pmatrix} -1-T & 3 & -2 \\ -1 & 1-T & 0 \\ -1 & -3 & 4-T \end{pmatrix}$. Da cui si calcola il polinomio carattreistico: $T^2(T-4)$. Troviamo la dimensione del sottospazio V_0. La matrice caratteristica per $h = 0$ diventa $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha rango due quindi $dim(V_0) = 3 - 2 = 1 < 2$ che è la molteplicità algebrica. Si può concludere che l'endomorfismo non è semplice.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

1. Nel piano $z = 0$ scrivere l' equazione della parabola $\wp$ avente vertice in $V = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, asse di simmetria l' asse $\vec{x}$ e tangente alla retta $x = y$.
2. Determinare e studiare il fascio di quadriche $\mathcal{Q}$ contenenti la parabola $\wp$, simmetriche rispetto al piano $y = 0$, passanti per il punto $P = (1, 1, 1)$ ed aventi in $V = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ piano tangente $x = \frac{1}{2}$.
3. Determinare la circonferenza γ ottenuta secando $\mathcal{Q}$ col piano $x = 0$ e il cilindro avente γ come direttrice e generatrici parallele alla retta $x = y = x$.

Risoluzione

1. Per quanto si sa dalle proprietà della parabola in forma canonica, la nostra parabola $\wp$

appartiene al fascio delle coniche tangenti alla retta $x = \frac{1}{2}$ (che è la tangente nel vertice) e tangenti alla retta impropria $t = 0$, nel punto improprio dell'asse $\vec{x}$. Quindi si ha il fascio di coniche bitangenti:

$$\lambda(x - \frac{1}{2}) + y^2 = 0$$

Intersecando con la retta $x = y$ vogliamo imporre che essa sia tangente. Facendo il sistema si ottiene la risolvente: $x^2 + \lambda x - \frac{\lambda}{2} = 0$. Ponendo $\Delta = 0$ si ottiene $\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Si sceglie $\lambda = -2$. Quindi le equazioni della parabola $\wp$ sono $\begin{cases} z = 0 \\ y^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$.

2. Il fascio di quadriche contenenti $\wp$ è

$$z(ax + by + cz + d) + y^2 - 2x + 1 = 0$$

Perchè la quadrica sia simmetrica risprtto al piano $y = 0$, la sua equazione deve contenere solo termini di grado pari in y; dovrà allora essere $b = 0$.
Imponiamo il passaggio per il punto P. Dovrà essere $a + c + d = 0$.
L'equazione del piano tangente alla generica quadrica, nel punto $V = (\frac{1}{2}), 0, 0)$ si ottiene dalla formula

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & c & \frac{d}{2} \\ -1 & 0 & \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Si ottiene $\frac{a}{2}x + (\frac{a}{4} + \frac{d}{2})z + \frac{1}{2} = 0$. Identificando tale piano al piano di equazione $x - \frac{1}{2} = 0$ si deduce $a = -2d$. La quale insieme alle precedenti condizioni ci dice che $\begin{cases} a = -2d \\ b = 0 \\ c = -a - d = d \\ d = d \end{cases}$.
La generica quadrica cercata ha equazione:

$$z(-2dx + dz + d) + y^2 - 2x + 1 = 0$$

La matrice della quadrica è $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & d & \frac{d}{2} \\ -1 & 0 & \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix}$ Si vede facilmente che $|B| = -d$ e che $|A| = -d^2$.
Si deduce che per $d = 0$ si ha un cilindro parabolico.
Per $d \neq 0$ si ha che per $d > 0$ si hanno iperboloidi ellittici; mentre per $d < 0$ iperboloidi iperbolici.

3. Secando la generica quadrica $\mathcal{Q}$ col piano $x = 0$ si ha $\begin{cases} x = 0 \\ dz^2 + dz + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$ che per $d = 1$ è una circonferenza.
Troviamo adesso l'equazione del cilindro. Sia (o, y_0, z_0) un punto generico su γ. Le equazioni della retta passante per il punto e parallela alla retta $x = y = z$ sono $x = y - y_0 = z - z_0$. Il cilindro cercato si trova eliminando i parametri y_0 e z_0 dal sistema $\begin{cases} y_0^2 + z_0^2 + z_0 + 1 = 0 \\ y_0 = y - x \\ z_0 = z - x \end{cases}$. L'equazione ottenuta è $(y - x)^2 + (z - x)^2 + z - x + 1 = 0$.