FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 23/06/2006

I

Si consideri l' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(1,0,1) = (4-h, 5-2h, 6-h); \quad f(1,0,-1) = (h, 1, -h)$$

e che il vettore $v_1 = (1,1,1)$ sia un autovettore associato all' autovalore $\lambda = 2$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Studiare la semplicità di f, al variare di h..
3. Determinare $f^{-1}(1,1,1)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Risoluzione

1. È bene ricordare che quando si hanno uno o più autovettori è sempre conveniente rappresentare la matrice associata, scegliendo come base in entrambi gli spazi una base che contenga tali autovettori. Quindi, nel nostro caso, scegliamo la base $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,0,1);\ u_2 = (1,0,-1);\ v_1 = (1,1,1)\}$ sia nel dominio che nel codominio.
Intanto preso il generico vettore $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ troviamo le sue componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Si deve avere $(a,b,c) = x(1,0,1) + y(1,0,-1) + z(1,1,1)$. Passando alle componenti si ottiene il sistema
$$\begin{cases} x+y+z = a \\ z = b \\ x-y+z = c \end{cases}$$
il quale ammette la soluzione $x = \frac{a-2b+c}{2}; y = \frac{a-c}{2}; z = b$.
Troviamo quindi la matrice $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Ricordiamo che la prima colonna è costituita dalle componenti del vettore $f(u_1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Quindi si deve esprimere $f(u_1) = (4-h, 5-2h, 6-h) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3v_1$. Ma poichè abbiamo prima trovato la legge che da' le componenti di un vettore rispetto alla base $\mathcal{B}$, si ha facilmente $a_1 = \frac{4-h-10+4h+6-h}{2} = h$; $a_2 = \frac{4-h-6+h}{2} = -1$; $a_3 = 5-2h$. Analogamente si procede per trovare le componenti di $f(u_2)$ e di $f(v_1)$. Quindi la matrice A sarà
$$A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} h & -1 & 0 \\ -1 & h & 0 \\ 5-2h & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
.
Per studiare l'applicazione lineare basta calcolare il determinante della matrice A. Si ha $|A| = 2(h^2-1) = 0$. Quindi il rango si abbassa per $h = \pm 1$. Ed allora per $h \neq \pm 1$ si ha un isomorfismo.
Esaminiamo gli altri casi.
Per $h = 1$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La dimensione dell'immagine è 2 e una base dell'immagine si ottiene prendendo i vettori che hanno come componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ le prime due colonne della matrice data A per il valore $h = 1$. Il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo costruito sulla matrice A.

Si ottiene $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$, da cui si ha la generica soluzione $(x,x,-\frac{3}{2}x)$. Quindi il nucleo è il vettore che ha come componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$, per esempio $(2,2,-3)$.

Per $h=-1$ la matrice A diventa $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il suo rango è due, quindi la dimensione dell'immagine è due. Una base dell'immagine si trova prendendo, per esempio la II e la III colonna della matrice A, per $h=-1$, e considerando i vettori che hanno tali colonne come componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo costruito su A. I dettagli al lettore.

2. La matrice caratteristica è $\begin{pmatrix} h-T & -1 & 0 \\ -1 & h-T & 0 \\ 5-2h & 1 & 2-h \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è il determinante della matrice caratteristica, cioè $P(T)=(2-T)[(h-T)^2-1]=0$.
Gli autovalori sono quindi $T_1=2; T_2=h-1; T_3=h+1$.
Si possono verificare i due seguenti casi:
1) $T_1=T_2=2$ per $h=3$. In tal caso l'autovalore $T=2$ ha molteplicità $m=2$. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio V_2. Il rango della matrice caratteristica $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in questo caso è $r=1$. Quindi $dimV_2=3-1=2=m$. L'altro autovalore è semplice, quindi in tal caso l'endomorfismo è semplice.
2) $T_1=T_3=2$ per $h=1$. Anche in tal caso l'autovalore $T=2$ ha molteplicità $m=2$. Il rango della matrice caratteristica $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in tal caso è due. Quindi la $dimV_2=3-2=1<2=m$. In tal caso l'endomorfismo non è semplice.
3) Per i valori $h \neq 1,3$ gli autovalori sono reali e distinti e quindi l'endomorfismo è sempre semplice.

3. Per trovare la controimmagine del vettore $(1,1,1)$, tenuto conto che abbiamo associato ad f una matrice rispetto alle basi $\mathcal{B}$ sia nel dominio che nel codominio, bisogna intanto trovare le componenti di $(1,1,1)$ nella base $\mathcal{B}$.
Dalle formule gia' trovate si ha $(1,1,1)_{\mathcal{B}}=(0,0,1)$.
Allora diciamo (x,y,z) le componenti del generico vettore v del dominio, dobbiamo imporre che sia $\begin{pmatrix} h & -1 & 0 \\ -1 & h & 0 \\ 5-2h & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si tratta di discutere, al variare di h, il precedente sistema. Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & -1 & 0 & 0 \\ -1 & h & 0 & 0 \\ 5-2h & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} h & -1 & 0 & 0 \\ h^2-1 & 0 & 0 & 0 \\ 5-h & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

scambiando la seconda con la terza riga della matrice si ottiene $\left(\begin{array}{ccc|c} h & -1 & 0 & 0 \\ 5-h & 0 & 2 & 1 \\ h^2-1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.
Se $h^2-1 \neq 0$ Il sistema ammette una e una sola soluzione $x=0; y=0; z=\frac{1}{2}$, Come controimmagine si trova il vettore $v_1=0u_1+0u_2+1v_1$.
Se invece $h=\pm 1$ si affrontano i casi particolari; dettagli al lettore.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

1. Si studi il fascio delle coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $x - y + 2 = 0$ in $V = (-1, 1)$ e passanti per $A = (-1, 0)$ e $B = (0, 1)$.

2. Detta $\wp$ la parabola del fascio trovare una sua forma canonica e il cambiamento di coordinate che l'ha determinata.

3. Trovare l'equazione del cilindro avente $\wp$ come direttrice e generatrici parallele alla retta di equazioni $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Risoluzione

1. Il fascio si può individuare mediante le coniche spezzate nella tangente in V e la congiungente A e B. Come altra conica spezzata si prende quella spezzata nella coppia di rette VA e VB. Quindi il fascio è dato da: $(x - y + 2)(x - y + 1) + k(x + 1)(y - 1)$, che si può scrivere $x^2 + (k - 2)xy + y^2 + (3 - k)x + (k - 3)y + 2 - k + 0$.
   La matrice B della generica del fascio è $\begin{pmatrix} 1 & \frac{k-2}{2} & \frac{3-k}{2} \\ \frac{k-2}{2} & 1 & \frac{k-3}{2} \\ \frac{3-k}{2} & \frac{k-3}{2} & 2-k \end{pmatrix}$.
   $|A| = 1 - (\frac{k-2}{2})^2 = \frac{-k^2+4k}{4}$. Quindi si hanno:
   Ellissi per $0 < k < 4$.
   Parabola per $k = 4$. Ovviamente per $k = 0$ si ha una conica spezzata e non una parabola.
   Iperboli per $k < 0$ e $k > 4$.

2. L'equazione della parabola è $x^2+2xy+y^2-x+y-2 = 0$. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$.
   Calcoliamo il polinomio caratteristico della sottomatrice A.
   Si ha $|(A - TI)| = (1 - T)^2 - 1 = 0$ e gli autovalori sono $T_1 = 0$; $T_2 = 2$. Con un semplice calcolo si trova che $|B| = -1$. Quindi si ha $-2\gamma^2 = -1$. Quindi $\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Il punto improprio della parabola è $(1, -1, 0$. L'asse di simmetria, per i dati del problema, è la retta $x = -y$. Quindi se si orienta l'asse $\overrightarrow{X}$ scegliendo $I = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ allora la forma canonica sarà: $2Y^2 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}X$. La matrice Q della rototraslazione $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; per considerazioni geometriche elementari il vertice della parabola è $V = (-1, 1)$.

3. Le equazioni della parabola $\wp$ nello spazio sono $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy - x + t - 2 = 0 \end{cases}$. Diciamo $G = (\alpha, \beta, 0)$ un punto generico su $\wp$. Allora dovrà essere soddisfatta l'equazione di condizione $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha + \beta - 2 = 0$. Le equazioni della generatrice per G sono $x - \alpha = \frac{y-\beta}{-1} = z$. Pertanto $\alpha = x - z$ e $\beta = z - y$. Sostituendo tali valori nell'equazione di condizione si trova l'equazione del cilindro richiesto

$$(x - z)^2 + (z - y)^2 + 2(x - z)(z - y) - x + z + z - y - 2 = 0$$

.