FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 30/01/2008

I

Si consideri l' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle equazioni

$$f(x, y, z) = (x + y + z, hx + (2 - h)y + (1 - 2h)z, hx + hy + (2h + 1)z)$$

1. Studiare tale applicazione, al variare di h, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Calcolare $f(1, -1, 1)$ e $f(1, 1, 0)$. Utilizzare i risultati ottenuti per lo studio della semplicità dell'endomorfismo f.
3. Trovare, al variare di h, il sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $f(V) = \mathcal{L}(2, 0, h + 2)$.
4. Calcolare $f(W)$ dove $W = \mathcal{L}[(1, -1, 1; (1, 1, 0)]$

Risoluzione

1. Si scriva la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche. Si ha subito $A = M^{E,E}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h & 2-h & 1-2h \\ -h & h & 2h+1 \end{pmatrix}$. Sottraendo alla seconda riga la prima moltiplicata per h e addizionando alla terza riga la prima moltiplicata per h, si ha: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2h & 1-3h \\ 0 & 2h & 3h+1 \end{pmatrix}$.
   Il determinante di tale matrice è $|A| = 2(h + 1)$. Pertanto per $h \neq -1$ si ha un isomorfismo; mentre per $h = -1$, la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; essa ha rango 2 e la dimensione dell'immagine è 2. Una base dell'immagine è data dalle prime due colonne della matrice di partenza ponendo $h = -1$. La base di $Im(f)$ è $(1, -1, 1); (1, 3, -1)$.
   Per il nucleo basta risolvere il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Quindi si ha: $(0, y, -y)$, e come base del $Ker(f)$ si può prendere $(0, 1, -1)$.
2. Usando la matrice A si calcolano facilmente: $f(1, -1, 1) = (1, -1, 1)$; $f(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$. Basta moltiplicare A per i vettori colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da quanto ottenuto si deduce che tale vettori sono autovettori associati agli autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Quindi per ottenere una matrice associata ad f che sia particolarmente semplice è bene riferirsi ad una base che includa tali autovettori. Diciamo B la base costituita da
   $B = \{v_1 = (1, -1, 1),\ v_2 = (1, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}$. E'conveniente usare la matrice $M^{B,B}(f)$, quindi la matrice avente come colonne, ordinatamente, le componenti rispetto alla base B delle immagini $f(v_1),\ f(v_2),\ f(e_3)$, cioè $[f(v_1)]_B$, $[f(v_2)]_B$, $[f(e_3)]_B$.

E' facile trovare la matrice $M^{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 2 & 1-h \\ 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix}$. Le prime due colonne si trovano subito tenendo conto del fatto che v_1 e v_2 sono autovettori e la terza colonna si trova calcolando le componenti di $f(e_3) = (1, 1-2h, 2h+1)$, rispetto alla base B. Basta esprimere $(1, 1-2h, 2h+1) = xv_1 + yv_2 + ze_3$. Risolvendo il sistema si ottiene la matrice di cui sopra . Scriviamo adesso la matrice caratteristica:

$$\begin{pmatrix} 1-T & 0 & h \\ 0 & 2-T & 1-h \\ 0 & 0 & (h+1)-T \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $T_1 = 1;\ T_2 = 2;\ T_3 = h+1$.
Allora $T_1 = T_3$, per $h = 0$;
$T_2 = T_3$ per $h = 1$

Pertanto per $h \neq 0, 1$, essendo gli autovalori reali e distinti, l'endomorfismo è semplice.

Esaminiamo i casi con le radici doppie:

Per $h = 0$ $T_1 = T_3 = 1$ con $m = 2$. Sostituendo $T = 1$ e $h = 0$ nella matrice caratteristica si ha $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Essa ha rango 1 e quindi la dimensione dell'autospazio V_1 è $3 - r(A - 1I) = 3 - 1 = 2$ che è uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore $T = 1$.

Per $h = 1$ l'autovalore $T = 2$ ha molteplicità 2. Sostituendo tali valori nella matrice caratteristica si ha $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si argomenta come nel caso precedente, e anche in tal caso l'endomorfismo è semplice.

In conclusione l'endomorfismo è sempre semplice.

3. Consideriamo la matrice usata usata nel precedente punto 2. Allora dobbiamo trovare le componenti del vettore di cui si chiede la controimmagine rispetto alla base B. Un semplice calcolo dice che tali componenti sono $(1, 1, h+1)$. Bisogna discutere, al variare di h, il sistema la cui matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & | & 1 \\ 0 & 2 & 1-h & | & 1 \\ 0 & 0 & h+1 & | & h+1 \end{pmatrix}$$

Si deduce subito che per $h \neq -1$ il sistema ha una sola soluzione $(1-h, h/2, 1)$. In tal caso $V = \mathcal{L}(1-h, h/2, 1)$.
Se $h = -1$ il sistema ha rango 2 e la conclusione segue facilmente.

4. Si ha subito che $f(W) = W$, in quanto le immagini dei due autovettori sono per definizione proporzionali agli autovettori stessi.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

Sia Φ il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$\lambda x^2 + (\lambda - 2)y^2 - 2xy - 4\lambda = 0$$

1. Studiare il fascio indicando, in particolare, i punti base e le coniche spezzate.

2. Detta γ l'iperbole equilatera del fascio, trovare una sua forma canonica e il cambiamento di coordinatre che l'ha determinata.

3. Trovare l'equazione del cono C e del cilindro C' aventi γ come direttrice e vertici rispettivamente i punti $V = (0, 0, 1)$ e $V' = (0, 0, 1, 0)$.

4. Classificare le sezioni piane del cono C ottenute con i piani coordinati.

Risoluzione

1. Scriviamo la matrice B della conica $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4\lambda \end{pmatrix}$.

   Il determinante di B si annulla per i valori: $\lambda = 0$; $\lambda = 1 - \sqrt{2}$; $\lambda = 1 + \sqrt{2}$. Per tali valori si ottengono le coniche spezzate.
   $|A| = \lambda^2 - 2\lambda - 1$. Si hanno quindi Ellissi per $\lambda < 1 - \sqrt{2}; \lambda > 1 + \sqrt{2}$.
   Iperboli per $1 - \sqrt{2} < \lambda < 1 + \sqrt{2}$. Non ci sono parabole perchè i valori che $|A|$ annullano anche $|B|$.
   L'iperbole equilatera si ottiene per $tr(A) = 0$. E ciò si ha per $\lambda = 1$.
   I punti base del fascio si trovano intersecando due qualunque coniche del fascio. Scriviamo il fascio nella forma: $\lambda(x^2 + y^2 - 4) + (-2y^2 - 2xy) = 0$. Allora i punti base si trovano dal sistema

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ -2y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

   Quindi sono i punti comuni alla circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 2$ e le due rette: asse delle $\vec{x}$ e seconda bisettrice $x + y = 0$. Quindi essi sono $A = (-2, 0); B = (2, 0); C = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}); D = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
   Quindi le coniche spezzate si trovano congiungendo opportunamente i 4 punti base che sono distinti.

2. Le equazioni dell'iperbole equilatera sono $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 - 2xy - 4 = 0 \end{cases}$. Con le usuali tecniche si trova una forma canonica e le equazioni del cambiamento di coordinate che l'ha determinata.

3. Per trovare le equazioni del cono C e del cilindro C', prendiamo un punto generico sulla direttrice γ. Tale punto ha coordinate $G = (\alpha, \beta, 0)$ con la condizione $\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 4 = 0$.
   Le equazioni della retta VG sono: $\frac{x}{\alpha} = \frac{x}{\beta} = \frac{z-1}{1}$. Ma $\alpha = \frac{x}{1-z}$, $\beta = \frac{y}{1-z}$. Per trovare l'equazione del cono bisogna eliminare α e β dal sistema $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 4 = 0 \\ \alpha = \frac{x}{1-z} \\ \beta = \frac{y}{1-z} \end{cases}$.
   Si ottiene l'equazione: $x^2 - y^2 - 2xy - 4(1 - z)^2 = 0$.
   Nel caso del cilindro le equazioni della retta VG sono $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ e quindi l'equazione del cilindro è $x^2 - y^2 - 2xy - 4 = 0$.

4. Per stabilire la natura della sezione del cono col piano coordinato $x = 0$, bisogna scrivere l'equazione del cono in coordinato omogenee, e trovare i punti impropri della conica sezione

$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2xy - 4(t-z)^2 = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ e semplificando si ha $\begin{cases} -y^2 - 4z^2 = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \end{cases}$. Si hanno due punti impropri immaginari coniugati e la sezione è quindi una ellisse.

Analogamnete si procede con le sezioni con gli altri pianio coordinati: $y = 0$ e $z = 0$.