FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 30/01/09

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

1. Si considerino il punto $A = (0, 0, 4)$ e i piani $\pi : x - y + z - 1 = 0$ e $\sigma : x + z = 0$. Determinare:
   a) Il simmetrico A' di A rispetto al piano π.
   b) Il piano σ' simmetrico di σ rispetto al piano π.

2. Nel piano $z = 0$ determinare la parabola $\wp$ avente vertice $V = (1, 1)$, punto improprio $(1, 1, 0)$ e passante per il punto $(1, 0)$.
   Trovare una sua forma canonica ed il cambiamento di coordinate che la determina.

3. Trovare e studiare le quadriche contenenti le due coniche

$$\gamma_1 \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy + x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_2 \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2z^2 + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Risoluzione

1. a) Per trovare il simmetrico di A rispetto al piano π bisogna condurre la perpendicolare al piano π da A, determinare il punto M di intersezione e trovare il punto A' tale che M sia il punto medio del segmento AA'.
   Le equazioni della retta per A perpendicolare al piano sono $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 4 + t \end{cases}$; intersechiamo col piano $x - y + z - 1 = 0$ e troviamo le coordinate del punto M di intersezione; si ha $M = (-1, 1, 3)$. Dette (x, y, z) le coordinate di A', imponendo che M sia punto medio di AA', si ha $\begin{cases} \frac{x}{2} = -1 \\ \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{z+4}{2} = 3 \end{cases}$, da cui si deduce che $A' = (-2, 2, 2)$.
   b) Per trovare σ' si sceglie un punto arbitrario su σ, per esempio il punto $O = (0, 0, 0)$, si trova il suo simmetrico O' rispetto a π, con lo stesso procedimento usato nel punto a), e nel fascio di piani avente per asse la retta comune a π e a σ si sceglie quello passante per O'.
   Le coordinate di O' sono $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. L' equazione del fascio di piani è

$$\lambda(x + z) + \mu(x - y + z - 1) = 0.$$

   Imponiamo il passaggio per il punto O'. Si ottiene $\lambda(\frac{4}{3}) + \mu(1) = 0$; da cui si ha $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{3}{4}$. Il piano cercato è: $3(x + z) - 4(x - y + z - 1) = 0$, cioè $x - 4y + z - 4 = 0$.

2. Si ricorda che il punto improprio di una parabola individua la direzione dell' asse di simmetria e che tale asse passa per il vertice. Quindi la parabola $\wp$ cercata appartiene al fascio di coniche bitangenti alla retta per V perpendicolare all' asse di simmetria e alla retta impropria. Le coniche spezzate del fascio sono le due tangenti e la congiungente i punti di contatto contata due volte. Una volta individuato il fascio si impone il passaggio per il punto di coordinate $(1, 0)$.
   Quindi l' equazione del fascio è $\lambda(x + y - 2)t + \mu(x - y)^2 = 0$. Imponendo il passaggio per il punto $(1, 0)$ si ottiene $\lambda = \mu$. Quindi l' equazione della parabola è

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

Per trovare una sua forma canonica si è avvantaggiati dal fatto di conoscere l' asse di simmetria e il vertice. In ogni caso la forma canonica sarà del tipo $\beta Y^2 = 2\gamma X$.

Scriviamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$ di $\wp$. Il polinomio caratteristico di A è $\begin{vmatrix} 1-T & -1 \\ -1 & 1-T \end{vmatrix} = 0$. Si trovano gli autovalori $T = 0$ e $T = 2$. Per calcolare γ si usano gli invarianti ortogonali. Quindi $|B| = -1$; da cui $\beta\gamma^2 = 1$ e $\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Se si orienta l' asse $\vec{X}$ nel verso che va' dal III al I quadrante, l' equazione canonica della parabola $\wp$ è $Y^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ovviamente la matrice della rototraslazione sarà la matrice $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. La più generale quadrica contenente la conica γ_1 è

$$1) \qquad z(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 - 2xy + x + y - 2 = 0.$$

Se vogliamo che tale quadrica contenga anche γ_2 deve accadere che secando la quadrica col piano $x = 0$ si ottenga un residuo proporzionale a $y^2 + 2z^2 + y - 2 = 0$. Per $x = 0$ si ha: $byz + cz^2 + dz + y^2 + y - 2 = 0$. Identificando i due residui si ha che $c = 2$; $b = 0$; $d = 0$; $a = a$ indeterminato.
Sostituendo i valori trovati nell' equazione 1) si ottiene l' equazione della famiglia di quadriche cercate e cioè

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + axz + x + y - 2 = 0.$$

La matrice della generica quadrica è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per potere valutare il tipo di quadriche della famiglia si deve calcolare il rango di B, il suo segno, quando è diverso da zero, il determinante della sottomatrice A.
Per semplificare i calcoli sommiamo alla I colonna di B la seconda; nella matrice ottenuta si somma alla I riga la seconda e si ottiene una nuova matrice che ha lo stesso determinante di B. La matrice ottenuta è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & 0 & 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Il determinante di questa matrice è più semplice e si trova $|B| = \frac{9a^2-32}{16}$.
Il determinante della sottomatrice A è $|A| = -\frac{a^2}{4}$.
Si può allora dire che

a) Per $a = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ le quadriche sono **Coni**.
b) Per $a < -\frac{4\sqrt{2}}{3}; a > \frac{4\sqrt{2}}{3}$ si hanno **Iperboloidi iperbolici**.
c) Per $a \neq 0$ e $-\frac{4\sqrt{2}}{3} < a < \frac{4\sqrt{2}}{3}$ si hanno **Iperboloidi ellittici**.
d) Per $a = 0$ si ha un **Paraboloide ellittico**.

II

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(x, y, z) = h \cdot id_{\mathbb{R}^3}(x, y, z) + g(x, y, z)$$

dove $g(x,y,z) = (-y+3z, -x+3z, -x-y+4z)$, $h \in \mathbb{R}$ e $id_{\mathbb{R}^3}$ è l' applicazione identica su $\mathbb{R}^3$.

1. Studiare, al variare di h, l' endomorfismo f determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Studiare, al variare di h, la semplicità dell' endomorfismo, trovando quando è possibile una base di autovettori.
3. Trovare, al variare di h, $f^{-1}(-1,1,0)$.

Risoluzione

1. Esplicitando le condizioni date il nostro endomorfismo si può scrivere

$$f(x,y,z) = (hx - y + 3z, -x + hy + 3z, -x - y + (h+4)z)$$

e quindi la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è $A = M(f) = \begin{pmatrix} h & -1 & 3 \\ -1 & h & 3 \\ -1 & -1 & h+4 \end{pmatrix}$.

Riduciamo per righe la matrice A per determinare il suo rango. Si ha

$$\begin{pmatrix} h & -1 & 3 \\ -1 & h & 3 \\ -1 & -1 & h+4 \end{pmatrix} \longrightarrow_{\substack{R_2 \leftrightarrow R_2 + hR_1 \\ R_3 \leftrightarrow R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} h & -1 & 3 \\ h^2-1 & 0 & 3(h+1) \\ -1-h & 0 & h+1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} h & -1 & 3 \\ -1-h & 0 & h+1 \\ h^2-1 & 0 & 3(h+1) \end{pmatrix}$$

A questo punto se $h=-1$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi il suo rango è 1 e la dimensione dell' immagine è 1. Una base dell' immagine è data da una qualunque colonna della matrice di partenza per $h=-1$. Per esempio il vettore $(1,1,1)$ è una base dell' immagine mentre il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo costruito sulla matrice; si ottiene $x+y-3z=0$, da cui $x=-y+3z$. Allora il generico vettore del nucleo è $(-y+3z, y, z)$. Una base del nucleo è $(-1,1,0); (3,0,1)$.
Se invece $h+1 \neq 0$ si continua a ridurre la matrice dove avevamo lasciato e con la sostituzione $R_3 \leftrightarrow R_3 - 3R_2$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} h & -1 & 3 \\ -1-h & 0 & h+1 \\ h^2+3h+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si trova che $h^2+3h+2=0$ per $h=-1$ e per $h=-2$.
Per $h=-2$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e il suo rango è 2. Una base dell' immagine è data da due qualunque colonne della matrice di partenza per $h=-2$ e una base del nucleo si ottiene dal sistema omogeneo costruito su quest' ultima matrice. Una base del nucleo è $(1,1,1)$.
Ovviamente per $h \neq -1, -2$ si ha un **isomorfismo**.

2. Per studiare la semplicità dell' endomorfismo scriviamo la matrice caratteristica, dopo avere osservato che la matrice A è associata ad f rispetto alle stesse basi del dominio e codominio. si ha

$$\begin{pmatrix} h-T & -1 & 3 \\ -1 & h-T & 3 \\ -1 & -1 & (h+4)-T \end{pmatrix} \tag{1}$$

Il polinomio caratteristico è il determinante di questa matrice. Per rendere più semplici i calcoli operiamo sulla matrice per mettere degli zeri con delle operazioni che lasciano invariato il determinate della stessa. Per esempio con le sostituzioni: $R_2 \leftrightarrow R_2 - R_1$ e nella matrice ottenuta sommando alla I colonna la II si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} h-T-1 & -1 & 3 \\ 0 & h-T+1 & 0 \\ -2 & -1 & (h+4)-T \end{pmatrix} \tag{2}$$

Sviluppando il determinate col teorema di Laplace applicato alla II riga si ottiene:

$$\big[(h+1)-T\big]\big[(h-T-1)\big[(h+4)-T\big]+6\big]=0$$

Dopo semplici calcoli si trova che gli autovalori sono: $T = h+1$ con molteplicità $m = 2$ e $T = h+2$ radice semplice. Ovviamente per h reale gli autovalori sono reali; l' unica cosa da studiare per la semplicità è la dimensione dell' autospazio associato all' autovalore $T = h+1$.
Nella matrice (2) si sostituisce $h+1$ alla variabile T e in tal modo si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, la quale ha rango 1 e quindi si ha $\dim V_{h+1} = 3-1 = 2 = m$. Gli autovettori associati a $T = h+1$ si calcolano dal sistema lineare omogeneo costruito sulla matrice caratteristica e quindi si ha $x+y-3z = 0$. Cioé $(3,0,1)$ e $(-1,1,0)$.
Per trovare gli autovettori associati all' autovalore $T = h+2$ si risolve il sistema lineare omogeneo costruito sulla matrice che si ottiene dalla matrice caratteristica (2) per $T = h+2$. Si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Facili calcoli provano che una soluzione del sistema omogeneo costruito su tale matrice è $(1,1,1)$.
In conclusione si puòdire che l' endomorfismo è sempres emplice.

3. Chiaramente la controimmagine di $(-1,1,0)$ si ottiene dal sistema lineare $A\underline{X} = B$, dove A è la matrice associata ad f e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Si riduce la matrice completa $(A|B)$ utilizzando le stesse riduzioni fatte nello studio della f al punto 1).
Si deduce subito che per $h = -1$ il sistema è incompatibile; mentre per $h+1 \neq 0$ riducendo ulteriormente si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & -1 & 3 & -1 \\ -1-h & 0 & h+1 & 1 \\ h^2+3h+2 & 0 & 0 & -h-2 \end{array}\right).$$

In conclusione si vede che per $h = -2$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni, mentre per $h \neq -1, -2$ il sistema ammette una e una sola soluzione. I dettagli sono lasciati allo studente.