FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 18/04/09

I

Si consideri la base $B = \{v_1 = (1,1,1);\ v_2 = (1,1,0);\ v_3 = (0,1,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e l' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle relazioni

$$f(v_1) = (2,2,2); \quad f(v_2) = (1,1,1); \quad f(v_3) = (2-h, 1+h, 1)$$

1. Studiare tale applicazione, al variare di h, determinando in ogni caso una base di $Im(f)$ e $Ker(f)$.
2. Dopo aver trovato la matrice $M^{B,B}(f)$ associata ad f relativamente alla base B sia nel dominio che nel codominio, studiare, al variare di h, la semplicità dell'endomorfismo.
3. Trovare $f^{-1}(1,0,h)$, al variare di h.

Soluzione

1. La matrice associata ad f relativamente alla base B del dominio e alla base canonica C del codominio è $M^{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-h \\ 2 & 1 & 1+h \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Con la sostizione $R_2 \leftrightarrow R_2 - R_1$ e $R_3 \leftrightarrow R_3 - R_1$ si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-h \\ 0 & 0 & 2h-1 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$.
   Per $h = 1$ essa diventa $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il suo rango è $2 = \dim Im(f)$ e una sua base è data da $(1,1,1); (1,2,1)$. Il $Ker(f)$ si ottiene dal sistema lineare omogeneo costruito sulla matrice. Si ha $(x, -2x, 0)$. Si prendono $(1,-2,0)$ che danno le componenti rispetto alla base B di una base di $Ker(f)$.
   Per $h = \frac{1}{2}$ si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Anche tale matrice ha rango 2. La dimensione dell' $Im(f)$ è 2 ed una sua base si ottiene prendendo nella matrice data la seconda e terza colonna; si ottiene $(1,1,1); (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$. Anche in questo caso il generico vettore del nucleo ha componenti $(x, -2x, 0)$.
   Infine per $h \neq 1, \frac{1}{2}$ si ha ancora rango 2. Una base dell' $Im(f)$ è data da $(1,1,1); (2-h, 1+h, 1)$. Il nucleo è ancora lo stesso.
2. Innanzitutto troviamo le componenti del generico vettore $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Dalla equazione vettoriale $(a,b,c) = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1)$ si deduce il sistema

   $$\begin{cases} x + y = a \\ x + y + z = b \\ x + z = c \end{cases}$$

   Si ottengono quindi le componenti $x = a - b + c;\ y = b - c;\ z = b - a$. Ne segue che la matrice associata ad relativamente alla base B in entrambi gli spazi è

   $$M^{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-2h \\ 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 2h-1 \end{pmatrix}$$

La matrice caratteristica è

$$\begin{pmatrix} 2-T & 1 & 2-2h \\ 0 & -T & h \\ 0 & 0 & (2h-1)-T \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $T_1 = 2$; $T_2 = 0$; $T_3 = 2h - 1$.
Si possono avere le coincidenze:

1) $T_1 = T_3 = 2$ e ciò per $h = \frac{3}{2}$. In tal caso al matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Tale matrice ha rango 2 e quindi $\dim V_2 = 3 - 2 = 1 < m_2 = 2$.
In tal caso l' endomorfismo **non è semplice**.

2) $T_2 = T_3 = 0$ per $h = \frac{1}{2}$. In tal caso la matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Anche in questo caso il rango della matrice caratteristica è2 e l' endomorfismo **non è semplice**.
3) Per $h \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, essendo gli autovalori reali e distinti l' endomorfismo **è semplice**.

3. Per trovare $f^{-1}(1, 0, h)$ possiamo usare la matrice $M^{B,C}(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-h \\ 2 & 1 & 1+h \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e discutere e risolvere il sistema $A\underline{X} = B$.
   Si consideri quindi la matrice completa del sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-h & | & 1 \\ 2 & 1 & 1+h & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & h \end{pmatrix}$; con le sostituzioni $R_2 \leftrightarrow R_2 - R_1$ e $R_3 \leftrightarrow R_3 - R_1$ la matrice completa diventa $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-h & | & 1 \\ 0 & 0 & 2h-1 & | & -1 \\ 0 & 0 & h-1 & | & h-1 \end{pmatrix}$.
   Per $h = \frac{1}{2}$ si annulla la seconda riga della matrice dei coefficienti mentre sulla colonna dei termini noti si ha -1. In tal caso il sistema è incompatibile.
   Per $h \neq \frac{1}{2}$, addizionando alla terza riga la seconda moltiplicata per $\frac{1-h}{2h-1}$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-h & | & 1 \\ 0 & 0 & 2h-1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{2h(h-1)}{2h-1} \end{pmatrix}$. Allora il sistema è compatibile solo per $h = 0$ e per $h = 1$. Il sitema ammette ∞^1 soluzioni. I dettagli sono lasciati come esercizio.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$
Nel piano $z = 0$ si considerino i punti:

$$A = (-2, 0); \quad B = (0, -2); \quad C = (0, 4); \quad D = (4, 0)$$

1. Studiare il fascio di coniche avente i predetti punti come punti base.
2. Detta $\wp$ la parabola del fascio trovare una sua forma canonica e il cambiamento di coordinate che l'ha determinata.
3. Scrivere l'equazione del cilindro avente $\wp$ come direttrice e vertice in $V = (1, 1, -1, 0)$.

Risoluzione

1. Il fascio di coniche è individuato dalla conica spezzata nei due assi coordinati e dalla conica spezzata nelle rette $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. L'equazione del fascio si può scrivere

$$(x + y + 2)(x + y - 4) + 2\lambda xy = 0$$

L'equazione del fascio si può anche scrivere

$$x^2 + y^2 + 2(1+\lambda)xy - 2x - 2y - 8 = 0$$

La matrice B della conica è $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & -1 \\ 1+\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -8 \end{pmatrix}$. Calcoliamo $|B| = 8\lambda^2 + 18\lambda$ e $|A| = -\lambda^2 - 2\lambda$.
Si hanno **ellissi** per $-2 < \lambda < 0$.
Si hanno**iperboli** per $\lambda < -2$ e $\lambda > 0$.
Si ha una **parabola** per $\lambda = -2$ e la sua equazione è $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y - 8 = 0$.

2. L'asse di simmetria della parabola è la retta $x - y = 0$. Il vertice della parabola è il punto di coordinate $V = (-2, -2)$. La matrice della rototraslazione è $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Si consideri il punto generico $G = (\alpha, \beta, 0)$ della parabola. Tale punto dovrà soddisfare con le sue coordinate le equazioni della parabola. Sarà quindi $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta - 8 = 0$. Sciviamo adesso le equazioni della retta congiungente il punto proprio G con il punto improprio $V = (1, 1, -1, 0)$; si ha $\frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z}{-1}$. Da cui si ha $\alpha = x + z$; $\beta = y + z$. Sostituendo tali valori nell' equazione di condizione si ottiene l' equazione del cilindro.

$$(x+z)^2 + (y+z)^2 - 2(x+z)(y+z) - 2(x+z) - 2(y+z) - 8 = 0.$$