FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Prova scritta di di **Geometria** assegnata il 30/01/04

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

Nel piano $z = 0$ si consideri il fascio di coniche

$$\mu x^2 + (\lambda - \mu)y^2 + 2\mu y - \lambda - \mu = 0.$$

1. Trovare i punti base, le coniche spezzate e tutte le coniche appartenenti al fascio.
2. Trovare la circonferenza $\underset{\sim}{c}$ del fascio e si indichi il suo centro ed il raggio.
3. Studiare le quadriche contenenti $\underset{\sim}{c}$ che dal piano $x = 0$ sono secate in circonferenze e che passano per $A = (0, -1, 1)$.

Risoluzione

1. L'equazione del fascio si può anche scrivere

$$\lambda(y^2 - 1) + \mu(x^2 - y^2 + 2y - 1) = 0.$$

La conica $y^2 - 1 = 0$ si spezza nelle due rette $y = \pm 1$; anche la conica $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$ è spezzata nelle rette $(x - y + 1)(x + y - 1) = 0$.
Dal sistema formato dalle dette coniche spezzate si trovano i punti base del fascio: $A = (0, 1)$ contato due volte e i punti $B = (-2, -1)$ e $C = (2, -1)$. Si deduce facilmente che le precedenti sono le uniche coniche spezzate del fascio; infatti il nostro fascio è il fascio delle coniche tangenti alla retta $y = 1$ nel punto $A = (0, 1)$.
Supposto $\mu \neq 0$, dividendo ambo i membri per μ e ponendo $\frac{\lambda}{\mu} = k$, l'equazione del fascio si può scrivere

$$k(y^2 - 1) + x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0.$$

La matrice B della conica diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & -k-1 \end{pmatrix}$. Ed allora $|B| = -k^2$; inoltre $|A| = k - 1$. Per $k \neq 0$ si hanno coniche irriducibili che sono:

Ellissi per $k > 1$; **Iperboli** per $k < 1$; **Parabola** per $k = 1$

Si ha una **circonferenza** per $a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0$ e cioè per $k = 2$. La sua equazione nel piano $z = 0$ è $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$.

2. Tale equazione, col metodo del completamento del quadrato, si può scrivere $x^2+(y+1)^2 = 4$. Si deduce che il centro della circonferenza è il punto $(0, -1)$ e il suo raggio è 2.

3. La più generale quadrica contenente la circonferenza ha equazione

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$$

Secando col piano $x = 0$ si deve ottenere una circonferenza. Per $x = 0$ si ottiene $byz + cz^2 + dz + y^2 + 2y - 3 = 0$. Perchè questa sia una circonferenza dev'essere $b = 0$; $c = 1$.

Imponiamo adesso il passaggio per il punto $(0,-1,1)$; si ha $d=3$. In definitiva si ottiene un fascio di quadriche di equazione

$$axz + z^2 + 3z + x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0.$$

La matrice della quadrica è $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{a}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$. Da un semplice calcolo si trova: $|B| = a^2 - \frac{25}{4}$ e $|A| = \frac{4-a^2}{4}$. Da ciò si deduce facilmente:

- Per $a = \pm\frac{5}{2} \quad \Longrightarrow |B| = 0$ si hanno **Coni** perchè $|A| \neq 0$.
- Per $a < \frac{-5}{2}$ e per $a > \frac{5}{2}$ si hanno **Iperboloidi iperbolici**.
- Per $\frac{-5}{2} < a < \frac{5}{2}$ con $a \neq \pm 2$ si hanno **Iperboloidi ellittici**.
- Infine per $a = \pm 2$ si hanno **Paraboloidi ellittici**.

II

Si considerino le relazioni:

$$f(1,0,-2) = (0,0,-2h); \quad f(0,0,1) = (h,0,h); \quad f(0,1,2) = (1-h,1,1+h)$$

1. Dire perché esse definiscono una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e studiare tale applicazione al variare del parametro h.
2. Studiare la semplicità di f, al variare di h.
   Per $h = 0$ trovare una base di autovettori.
3. Per $h = 0$, pensando $Ker(f)$ e $Im(f)$ sottospazi dello stesso $\mathbb{R}^3$, provare che $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Risoluzione

1. È noto che una applicazione lineare è perfettamente determinata, quando si assegnano le immagini dei vettori di una base.
   È immediato verificare che i vettori $(1,0,-2)$; $(0,0,1)$; $(0,1,2)$ sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base.
   È bene trovare la matrice associata ad f, rispetto alla base canonica E in entrambi gli spazi, dominio e codominio.
   Si ha $f(e_3) = (h,0,h)$; $f(e_1) - 2f(e_3) = (0,0,-2h)$; $f(e_2) + 2f(e_3) = (1-h,1,1+h)$.
   Da un semplice calcolo si trova $A = M(f)^{E,E} = \begin{pmatrix} 2h & 1-3h & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-h & h \end{pmatrix}$. Calcoliamo il determinante $|A| = 2h^2$. Si ha allora un isomorfismo per $h \neq 0$.
   Se invece $h = 0$ si ha $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. In tal caso il rango di A è 1. Quindi $\dim Im(f) = 1$ e una base dell'immagine è data da una colonna non nulla della matrice A. Si può prendere il vettore $(1,1,1)$. Il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo $A\underline{X} = \underline{0}$. nel nostro caso si ha $y = 0$. Quindi il generico elemento di $Ker(f) = (x,0,z)$. Come base si possono prendere $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.

2. La matrice caratteristica è $(A - TI) = \begin{pmatrix} 2h - T & 1 - 3h & h \\ 0 & 1 - T & 0 \\ 0 & 1 - h & h - T \end{pmatrix}$.

Gli autovalori sono $T_1 = 1;\ T_2 = h;\ T_3 = 2h$.

- Per $h \neq 0,\ 1,\ \frac{1}{2}$ gli autovalori sono reali e distinti e quindi l'endomorfismo èsemplice.
- Per $h = 1$ $T = 1$ con molteplicità $m = 2$. La matrice caratteristica in tal caso diventa $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Essa ha rango 1 e quindi la $\dim V_1 = 3 - 1 = 2$. In tal caso l'endomorfismo è semplice.
- Per $h = \frac{1}{2}$ $T = 1$ con molteplicità $m = 2$. La matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Essa ha rango 1 e quindi la $\dim V_1 = 3 - 1 = 2$. In tal caso l'endomorfismo è semplice.
- Per $h = 0$ $T = 0$ con molteplicità $m = 2$. La matrice caratteristica in tal caso diventa $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Anche in tal caso l'endomorfismo è semplice. Si vede facilmente che una base di autovettori è data da $(1, 0, 0),\ (0, 0, 1)$, associati all'autovalore 0; mentre per l'autovalore $T = 1$ si ottiene la matrice caratteristica $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Un autovettore associato all'autovalore si ottiene dal sistema $\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$, da cui si ha $(1, 1, 1)$.
- Per $h = 0$ una base di $Ker(f)$ e una di $Im(f)$ danno tre vettori indipendenti di $\mathbb{R}^3$, e quindi la tesi.