FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Edile-Architettura**

Prova scritta **A** di esonero di **Geometria I** assegnata il 22/11/03

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

Data la retta $\underline{r}\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$, il piano $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$ e il punto $A = (1, 0, 1)$.

1. Trovare le rette per A perpendicolari ad $\underline{r}$.
2. Trovare il luogo descritto da queste rette.
3. Determinare il piano contenente $\underline{r}$ e perpendicolare a π.
4. Trovare la retta per A perpendicolare ad $\underline{r}$ e parallela a π.
5. Calcolare l'angolo α, con $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, che $\underline{r}$ forma con π.

Risoluzione

1. I parametri direttori della retta r sono: $(-1, 1, -1)$. Le equazioni parametriche della retta generica per A sono: $\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = mt \\ z = 1 + nt \end{cases}$. Se vogliamo che tali rette siano ortogonali ad r dev'essere $l - m + n = 0$. Quindi le rette cercate sono quelle di equazioni: $\begin{cases} x = 1 + (m - n)t \\ y = mt \\ z = 1 + nt \end{cases}$.
2. Per trovare il luogo descritto dalle rette precedenti si devono eliminare i parametri dal sistema; si ottiene subito l'equazione: $x - 1 = y - z + 1$; quindi un piano.
3. Eliminando t, la retta r si può anche rappresentare come intersezione di due piani: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$. La totalità dei piani contenenti r si ottiene dalla combinazione lineare $\lambda(x + y - 1) + \mu(x - z - 1) = 0$. Questa si può anche scrivere $(\lambda + \mu)x + \lambda y - \mu z - \lambda = 0$. I parametri direttori delle normali al piano π e al piano cercato sono rispettivamente: $(1, -1, 2)$ e $((\lambda + \mu), \lambda, -\mu)$. Per l'ortogonalità la somma dei loro prodotti dev'essere nulla, da cui $\lambda + \mu - \lambda - 2\mu = 0$. In definitiva dev'essere $\mu = 0$; quindi il piano cercato è $x + y - 1 = 0$.
4. La retta cercata si può ottenere come intersezione del piano per A parallelo a π e del piano per A perpendicolare ad r. Tale ultimo è già stato trovato ed ha equazione: $x-y+z-2 = 0$. L'altro piano ha equazione: $x - 1 - y + 2(z - 1) = 0$. La retta cercata si può ottenere dal sistema: $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

5. La retta r forma con la normale al piano un angolo β che è complementare dell'angolo α cercato.
Si ha $cos\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \pm\frac{4}{\sqrt{18}}$. Se ci riferiamo all'angolo $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, prendiamo il segno positivo. Allora l'angolo α è $\alpha = \arcsin\frac{4}{3\sqrt{2}}$.

II

1. Studiare, al variare di h, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, associata alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -h & 2 \end{pmatrix}$$

determinando in ogni caso una base del $Kerf$ e Imf.

2. Determinare, se esistono, valori di h per cui ci siano vettori U di $\mathbb{R}^3$ non appartenti a Imf. Descrivere U.

Risoluzione

1. Riduciamo per righe la matrice $\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -h & 2 \end{pmatrix}$, sottraendo alla terza la prima riga moltiplicata per 2, si ha $\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2h & -h & 0 \end{pmatrix}$.
Per $h = 0$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed ha rango $2 = dimIm(f)$. L'immagine ha base formara dalla prime due colonne della matrice data per $h = 0$. Quindi $(1, 0, 2)$ e $(0, 3, 0)$. Il nucleo si ottiene risolvendo il sistema omogeneo costruito sulla matrice ridotta. Quindi il generico elemento del nucleo è $(x, y, -y, -x)$. Una base è $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, -1, 0)$
Se invece $h \neq 0$ la matrice è ridotta ed ha rango tre. Per trovare una abse dell'immagine basta prendere tre colonne linearmente indipendenti nella matrice di partenza; per trovare una base del nucleo bisogna risolvere il sistema lineare omogeneo costruito sulla matrice ridotta; in sostanza bisogna trovare le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x + hy + t = 0 \\ hx + 3y + 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$. Da semplici calcoli si deduce che come base del nucleo si può prendere: $(3, h, -2h, -(3+h^2))$.

2. Ovviamente perchè il sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sia non vuoto l'applicazione f non deve essere suriettiva. Quindi l'unico caso da considerare si ha per $h = 0$. L'immagine ha equazioni cartesiane che si ottengono imponendo che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, con l'aggiunta della terza riga (x, y, z), non aumenti il suo rango. Quindi riducendo la matrice si ha $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & y & z-2x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & z-2x \end{pmatrix}$, si deve imporre che l'ultima riga sia nulla. Quindi $Im(f) = \{(x, y, z)|2x - z = 0\}$. Allora $U = \{(x, y, z)|2x - z \neq 0\}$.
Ovviamente U non è un sottospazio.