FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 04/07/2003

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Si possono consultare solo i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$2x^2 - ky^2 + 2kxy + x - y - 1 = 0$$

con k parametro reale. In particolare, trovare:

i) i punti base;

ii) le coniche spezzate.

2) Sia $\wp$ la parabola del fascio. Trovare una sua forma canonica ed il cambiamento di coordinate che la determina. Determinare il cono $\mathcal{C}$ di vertice $(1, 0, 1)$ e direttrice $\wp$.

II

In $\mathbb{R}^3$, siano dati i vettori $v_1 = (1, 1, -2)$, $v_2 = (2, -1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (7, -1, h-2) \\ f(v_2) &= (h-1, 1, -h) \\ f(v_3) &= (h-3, 0, 1) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare $M^{\mathcal{E}}(f)$ al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Dire per quali valori di h l'endomorfismo f è semplice ed, in tali casi, trovare una base di autovettori.

Soluzione

I

Sia

$$\phi: 2x^2 - ky^2 + 2kxy + x - y - 1 = 0.$$

Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & \text{k} & \frac{1}{2} \\ \text{k} & \text{-k} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \text{-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(4k^2 + 7k - 2)$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow k = -2, \frac{1}{4}$. In tali casi si hanno coniche spezzate. Se $k = -2 \Rightarrow rkB = 2$ e ϕ si spezza nelle due rette $(x - y + 1)(x - y - \frac{1}{2}) = 0$. Se $k = -\frac{1}{4} \Rightarrow rkB = 2$ e ϕ si spezza nelle due rette $(2x + y + 2)(4x - y - 2) = 0$.

2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -2, \frac{1}{4}$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \text{k} \\ \text{k} & \text{-k} \end{vmatrix} = -k(k + 2)$$

Si ha: $|A| = 0 \Leftrightarrow k = 0, -2$. Essendo $k \neq -2$, si ha per $k = 0$ la parabola $\wp: \quad 2x^2 + x - y - 1$. $|A| > 0 \Leftrightarrow -2 < k < 0$ e si hanno ellissi. Nel nostro caso non si hanno circonferenze.
$|A| < 0 \Leftrightarrow k < -2$ e $k > 0$ e si hanno iperboli. In particolare, $TrA = 0 \Leftrightarrow k = 2$ e quindi si ha l'iperbole equilatera $\mathcal{I}: \quad 2x^2 - 2y^2 + 4xy + x - y - 1 = 0$.
i) I punti base del fascio si trovano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 + x - y - 1 = 0 \\ y(2x - y) = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $A = (-1, 0)$, $B = (\frac{1}{2}, 0)$, $C = (1, 2)$ e $D = (-\frac{1}{2}, -1)$.
ii) le coniche spezzate del fascio sono quella che si ottiene per $k = -2$, ovvero $(x - y + 1)(x - y - \frac{1}{2}) = 0$; per $k = -\frac{1}{4}$, ovvero $(2x + y + 2)(4x - y - 2) = 0$ e quella che si ottiene per $k = \infty$, ovvero $y(2x - y) = 0$.
3) La parabola richiesta è $\wp: 2x^2 + x - y - 1 = 0$. Gli autovalori relativi alla sottomatrice A sono $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. Essendo $|B| = -\frac{1}{2}$, si ha $-\beta\gamma^2 = -\frac{1}{2}$, da cui si deduce $\gamma = \pm\frac{1}{2}$. A questo punto si deve fare la scelta del segno. Il punto improprio della parabola è $Y_\infty = (0, 1, 0)$, il punto improprio in direzione ad esso ortogonale è $X_\infty = (1, 0, 0)$, pertanto l'asse di simmetria è la polare di X_∞, ovvero $x + \frac{1}{4} = 0$.
Facendo sistema tra l'equazione della parabola e quella dell'asse di simmetria si trova il vertice $V = (-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8})$. Adesso si deve trovare la matrice della rototraslazione che permette di ridurre l'equazione di $\wp$ in forma canonica

del tipo $\beta Y^2 = 2\gamma X$. $\wp$ ha la concavità rivolta verso l'alto e la forma canonica è $Y^2 = -\frac{1}{4}X$. La matrice della rototraslazione è la seguente:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 0 & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le formule del cambiamento di coordinate sono

$$\begin{cases} x = Y - \frac{1}{4} \\ y = -X - \frac{9}{8} \end{cases} \tag{1}$$

Il fuoco e la relativa direttrice nel nuovo sistema di riferimento sono $F = (-\frac{1}{16}, 0)$ e $X = \frac{1}{16},$. Utilizzando le formule (1), si ottiene $F' = (-\frac{1}{4}, -\frac{17}{16})$ e $y = -\frac{19}{16}$.

3) La parabola del fascio è $\wp : 2x^2 + x - y - 1 = 0$. Quindi da

$$z(ax + by + cz + d) + 2x^2 - y + x - 1 = 0$$

imponendo che $V = (1, 0, 1)$ sia vertice, ovvero che $V = (1, 0, 1)$ sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x + \frac{a}{2}z + \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{b}{2}z - \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y + cz + \frac{d}{2}t = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{d}{2}z - t = 0 \end{cases},$$

si ottiene

$$a = -5, \quad b = 1, \quad c = 2, \quad d = 1\,.$$

Pertanto il cono richiesto è il seguente

$$\Psi : \ 2x^2 + 2z^2 - 5xz + yz + x - y + z - 1 = 0$$

Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h} & \text{1+h} & \text{h-3} \\ 0 & \text{-1} & 0 \\ 0 & \text{h} & 1 \end{vmatrix} = -h$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0$ ed in tal caso f è un isomorfismo.
Sia $h = 0$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\{(1,-1,0),(-3,0,1)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbf{R} \mid y = 0, z = 0\}$, pertanto una base è data da $\{(1,0,0)\} = e_1$.
Calcoliamo adesso

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} \text{h-T} & \text{1+h} & \text{h-3} \\ 0 & \text{-1-T} & 0 \\ 0 & \text{h} & \text{1-T} \end{vmatrix} = (h-T)(1-T)(-1-T)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = h, \quad T_2 = 1, \quad T_3 = -1\,.$$

Allora $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ se $h \neq -1, 1$ e si hanno tre autovalori distinti allora f è semplice.
Troviamo una base di autovettori. Si ha:

$$V_h = \{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 \mid y = 0, z = 0\} = \{(0,x,0).\}$$

ed una base è data dal vettore $e_1 = (1,0,0)$.

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 \mid y = 0, x = \frac{h-3}{h-1}z\} = \{(\frac{h-3}{h-1}z, 0, z)\}$$

ed una base è data dal vettore $w_2 = (h-3, 0, h-1)$.

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 \mid y = 0, x = \frac{h-3}{h+1}z\} = \{(\frac{h-3}{h+1}z, 0, z\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (h-3, 0, h+1)$.
Quindi una base di autovettori è $\{e_1, w_2, w_3\}$ e la matrice diagonalizzante P è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & h-3 & h-3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & h+1 \end{pmatrix}$$

Sia $h = -1$; si ha $T_1 = 1$ semplice e $T_2 = -1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_{-1}$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha $\dim V_{-1} = 1$ e pertanto per $h = -1$ f non è semplice.
Sia $h = 1$; si ha $T_1 = -1$ semplice e $T_2 = 1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_1$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale a due si ha $\dim V_1 = 1$ e pertanto anche per $h = 1$ f non è semplice.