UNIVERSITÀ DI CATANIA

Facoltà di Ingegneria – Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in **Ingegneria Elettronica**

Prova scritta di **Geometria**, assegnata il 23 - 2 - 2000

- - - - -

Durata della prova: tre ore.

È consentito consultare solo i libri di testo.

Usare solo la carta fornita dal Dipartimento e **riconsegnare tutti** i fogli.

Non si può uscire dall'aula se non dopo la consegna **definitiva** del compito.

I

Nello spazio è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u\}$.

1. – Si studi il fascio Φ di coniche simmetriche rispetto alla retta $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$, passanti per il punto $A \equiv (0,1,0)$ e tangenti alla retta impropria del piano $x = 0$.

2. – Detta Γ la parabola di Φ , di vertice 0 , determinare e studiare il fascio Ψ di quadriche contenenti Γ e tali che il piano $y + z = 0$ risulti tangente in 0 a tutte le quadriche di Ψ e le sechi lungo l'asse delle $\vec{x}$ contato due volte.

3. – Determinare il luogo descritto dai vertici delle quadriche di Ψ .

4. – Determinare e studiare la superficie generata dalla rotazione della parabola $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 - 2yz - y - z = 0 \end{cases}$ attorno al proprio asse.

II

1. – Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano:

$V = \mathcal{L}(\underline{v_1},\ \underline{v_2},\ \underline{v_3}) \subset \mathbb{R}^4$, con $\underline{v_1} = (1,1,0,1)$, $\underline{v_2} = (0,0,1,1)$, $\underline{v_3} = (-1,1,0,2)$;

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'a.l. associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

• Detta f' la restrizione di f a V , si trovi l'a.l. $g : \mathbb{R}^3 \to V$ tale che $g \circ f'$ abbia $\underline{v_1}$, $\underline{v_2}$, $\underline{v_3}$ come autovettori associati, rispettivamente, agli autovalori 1 , -1 , 0 .

2. – Si determini il generico endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

a) $dim\ ker\ \varphi = 1$;

b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ sia l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 2$;

c) $Tr\big(M(\varphi)\big) = 1$;

d) $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z = 0\} \subset Im\ \varphi$.

A) Si provi che φ non è invertibile ed è sempre semplice.

Si determini, inoltre, la controimmagine $\varphi^{-1}(V)$ dove $V = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0\}$.

B) Eliminando la condizione c), si studi la semplicità del nuovo endomorfismo φ' in tutti i possibili casi.