

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio

Prova scritta di **Geometria** assegnata l' 11/04/03

I

Sia data l'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(x, y, z) = (x + hy - hz, hx + y, x + hz)$$

1. Studiare l'applicazione φ , al variare di h , determinando in ogni caso una base di $Im(\varphi)$ e $Ker(\varphi)$.
2. Trovare il polinomio caratteristico di φ e studiare la semplicità di φ solo per i valori di h per cui φ abbia l'autovalore $\lambda = 1$.
3. Trovare il sottospazio $V \in \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(V) \subseteq W$, dove $W = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 - y_2 + y_3 = 0\}$.

Risoluzione

1. La matrice associata all'applicazione lineare è $\begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}$. Riduciamo la matrice per trovare il suo rango.

Per $h = 0$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la quale ha rango 2. La dimensione dell'immagine è 2 e una base è data dalle colonne C_1, C_2 della matrice data per $h = 0$. Il nucleo ha dimensione 1 e si trova risolvendo il sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Quindi il nucleo ha come base $(0, 0, 1)$.

Riprendiamo la riduzione.

Supposto $h \neq 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ 2 & h & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 - hR_2} \begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ 2 - h^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per $h \neq \pm\sqrt{2}$ l'applicazione φ è un isomorfismo. Altrimenti si hanno i due casi particolari $h = \pm\sqrt{2}$.

Per $h = \sqrt{2}$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Essa ha rango 2; una base dell'immagine

è data da due colonne indipendenti della matrice data, per $h = \sqrt{2}$. Per esempio $(1, \sqrt{2}, 1); (\sqrt{2}, 1, 0)$. Il nucleo che ha dimensione 1 si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x + y = 0 \end{cases}$, che ha come soluzione $(1, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Il caso $h = -\sqrt{2}$ si tratta analogamente.

2. Dalla matrice di partenza consideriamo la matrice caratteristica $\begin{pmatrix} 1-T & h & -h \\ h & 1-T & 0 \\ 1 & 0 & h-T \end{pmatrix}$.

Se vogliamo che il nostro endomorfismo ammetta l'autovalore $T=1$, il polinomio caratteristico deve avere la soluzione $T=1$. Quindi il determinante, ottenuto sostituendo 1 al

posto di T , $\begin{vmatrix} 0 & h & -h \\ h & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h-1 \end{vmatrix} = 0$. Ciò si ha per $h=0; h=1$.

In definitiva bisogna studiare la semplicità dell'endomorfismo nei due precedenti casi.

Per $h=0$ la matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & 0 \\ 1 & 0 & -T \end{pmatrix}$. In tal caso il poli-

nomio caratteristico è $T(1-T)^2 = 0$. Per $T=1$ la matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Essa ha rango 1 e quindi la dimensione dell'autospazio associato è $\dim V_1 = 3 - r(A - 1I) = 3 - 1 = 2$. In tal caso l'endomorfismo φ è semplice.

Esaminiamo il caso in cui $h=1$. La matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 1-T & 1 & -1 \\ 1 & 1-T & 0 \\ 1 & 0 & 1-T \end{pmatrix}$.

Il polinomio caratteristico è $(1-T)^3 = 0$. Quindi l'autovalore è triplo. Si vede subito che il rango della matrice caratteristica corrispondente è 2 e quindi $\dim V_1 = 3 - 2 = 1$.

L'endomorfismo non è semplice.

3. L'immagine del generico vettore (x, y, z) è data dalla formula del testo

$$\varphi(x, y, z) = (x + hy - hz, hx + y, x + hz)$$

Quindi $y_1 = x + hy - hz; y_2 = hx + y, y_3 = x + hz$. L'immagine deve soddisfare $y_1 - y_2 + y_3 = 0$ e quindi si ha $x + hy - hz - hx - y + x + hz = 0$, da cui $(2-h)x + (h-1)y = 0$. Questo è il sottospazio V cercato. Esso è di dimensione 2, per ogni h .

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

1. Trovare l'equazione della parabola del piano $z=0$, avente vertice in O , asse di simmetria la retta $x-y=0$ e passante per $A=(2,0,0)$.
2. Ridurre la conica in forma canonica, indicando il cambiamento delle coordinate che l'ha determinata.
3. Trovare e studiare la quadrica contenente $\Gamma \begin{cases} z=0 \\ (x-y)^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$, passante per O con piano tangente $x+y=0$ e per $Z_\infty=(0,0,1,0)$ con piano tangente $x+y=0$.

Risoluzione

1. Come è noto la parabola è una conica tangente alla retta impropria $t=0$, nel punto improprio dell'asse di simmetria. Quindi la nostra parabola appartiene al fascio delle coniche bitangenti alla retta $x+y=0$, che è la perpendicolare all'asse di simmetria nel vertice O della parabola, e alla retta impropria.

Come altra conica spezzata del fascio si può prendere la congiungente i punti di contatto delle tangenti contata due volte. La congiungente il vertice (che è l'origine) col punto improprio dell'asse di simmetria è proprio la retta $x - y = 0$. Il fascio è quindi

$$\lambda(x+y)t + (x-y)^2 = 0$$

Imponendo il passaggio per il punto $A = (2, 0, 0)$ si ha $2\lambda + 4 = 0$, cioè $\lambda = -2$. Quindi la parabola ha equazione $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0$.

2. Troviamo una sua forma canonica. La matrice B della conica è: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcoliamo $|B| = -4$; $|A| = 0$. La forma canonica a cui si perverrà è del secondo tipo $\beta Y^2 = 2\gamma X$. Intanto calcoliamo gli autovalori della matrice A . Si ha $(A - TI) = \begin{vmatrix} 1-T & -1 \\ -1 & 1-T \end{vmatrix} = 0$. Si trova subito $T_1 = 0$; $T_2 = 2$. Quindi $\alpha = 0$; $\beta = 2$. Usando il metodo degli invarianti ortogonali si ha $\beta\gamma^2 = 4$. Da cui $\gamma = \pm 2$. L'autospazio associato all'autovalore nullo è $x-y=0$. L'autospazio associato all'autovalore 2 è $x+y=0$. Quindi scegliamo come matrice della rotazione $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Una forma canonica è $2Y^2 = 2\sqrt{2}X$.

3. Le quadriche che contengono la parabola dell'esercizio precedente sono

$$z(ax + by + cz + dt) + x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0$$

Le quadriche passano per O e il piano tangente in O si trova dalla formula ${}^t \underline{x}_0 B \underline{x} = 0$. Nel nostro caso si ha

$$(0, 0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & -1 \\ -1 & 1 & \frac{b}{2} & -1 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ -1 & -1 & \frac{d}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

Il piano tangente in O ha equazione $-x - y + \frac{d}{2}z = 0$; perchè tale piano coincida col piano $x + y = 0$ dev'essere $d = 0$. Inoltre le quadriche cercate devono passare per il punto $Z_\infty = (0, 0, 1, 0)$. Sostituendo nell'equazione della generica quadrica si ha $c = 0$. Calcolando come nel caso precedente l'equazione del piano tangente in Z_∞ si ha: $\frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y + \frac{d}{2} = 0$. Perchè tale piano coincida col piano $x + y = 0$ dev'essere $d = 0$ e $b = a$. In definitiva le quadriche cercate hanno equazione del tipo

$$z(ax + ay) + x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y$$

Studiamo tale fascio di quadriche. Calcoliamo $|B|$ e $|A|$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & -1 \\ -1 & 1 & \frac{a}{2} & -1 \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} \\ -1 & 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che $|B| = 0$, per ogni a . Inoltre $|A| = -a^2$.

Per $a \neq 0$ si hanno coni.

Per $a = 0$, l'equazione diventa $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0$ e la quadrica è un cilindro parabolico.