FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio

Risoluzione prova scritta di **Geometria** assegnata il 28/03/03

I

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalle relazioni

$$f(1, -1, 0) = (-k, -k, 2k - 4); \quad f(0, 1, 0) = (k, k, 2 - k); \quad f(0, 1, -1) = (k, k, 0)$$

1. Studiare l'applicazione lineare f , al variare di k , indicando in ogni caso una base del $\text{Ker}(f)$ e di $\text{Im}(f)$.
2. Studiare, al variare di k , la semplicità di f .
3. Determinare, al variare di k , la totalità dei vettori $v \in V$ tali che $F(V) \subseteq W$, dove $W = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_2 = 0; \quad y_3 = 0\}$.

Risoluzione

1. Scriviamo la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche. Dalle relazioni date si deduce

$$\begin{cases} f(e_1) - f(e_2) = (-k, -k, 2k - 4) \\ f(e_2) = (k, k, 2 - k) \\ f(e_2) - f(e_3) = (k, k, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} f(e_1) = (0, 0, k - 2) \\ f(e_2) = (k, k, 2 - k) \\ f(e_3) = (0, 0, 2 - k) \end{cases}$$

Quindi la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 \\ k - 2 & 2 - k & 2 - k \end{pmatrix}$.

Riduciamo per righe la matrice A .

Per $k = 0$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Quindi il rango è 1 e la dimensione

dell'immagine è 1. Una base dell'immagine è data $(0, 0, 1)$. Una qualunque colonna della matrice di partenza per $k = 0$. Per trovare il $\text{Ker}(f)$ si deve risolvere il sistema lineare omogeneo $A'X = \mathbf{0}$, dove A' è la matrice ridotta ottenuta riducendo A . Tale sistema porta a risolvere $x - y - z = 0$. Quindi la generica soluzione del nucleo è $(y + z, y, z)$. Una base del nucleo è $(1, 1, 0); (1, 0, 1)$.

Supponiamo adesso $k \neq 0$. Riprendendo la matrice A si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 \\ k - 2 & 2 - k & 2 - k \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftrightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftrightarrow R_3 - (2-k)R_1}]{R_2 \leftrightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k - 2 & 0 & 2 - k \end{pmatrix}$$

e due casi.

Tale matrice è ridotta. Bisogna distinguere distinguere due casi a seconda che:

$k = 2$ oppure $k \neq 2$. Nel primo caso la matrice diventa $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si deduce subito che il rango è 1 e $\dim \text{Im}(f)=1$, una base dell'immagine è $(1, 1, 0)$. Per trovare il nucleo basta risolvere il sistema lineare omogeneo $A'\underline{X} = \underline{0}$. Si deduce $y = 0$. Una base del $\ker(f)$ è data da $(1, 0, 0); (0, 0, 1)$.

Infine nel caso che $k \neq 2$, si ha che il rango di A è 2. La dimensione dell'immagine è 2 e basta prendere le prime due colonne della matrice di partenza A come base dell'immagine. Una base del nucleo, in tal caso, si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

e come base del nucleo si può scegliere $(1, 0, 1)$.

2. Per studiare la semplicità scriviamo la matrice caratteristica

$$\begin{pmatrix} -T & k & 0 \\ 0 & k - T & 0 \\ k - 2 & 2 - k & (2 - k) - T \end{pmatrix}$$

Gli autovalori risultano $T_1 = 0; T_2 = k; T_3 = 2 - k$.

Si può dire che se questi autovalori sono tutti e tre distinti, allora l'endomorfismo è semplice. Esaminiamo i casi in cui gli autovalori siano multipli.

1- $T_1 = T_2 = 0$, per $k = 0$. In tal caso la matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Il suo rango è 1 e quindi la dimensione dell'autospazio V_0 è 2 e l'endomorfismo è semplice anche in questo caso.

2- $T_1 = T_3 = 0$ per $k = 2$. In tal caso la matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il suo rango è 1 e quindi la dimensione dell'autospazio V_0 è 2 e l'endomorfismo è semplice anche in questo caso.

3- Infine $T_2 = T_3 = 1$ per $k = 1$. La matrice diventa in tal caso $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Anche in questo caso l'endomorfismo è semplice.

In definitiva l'endomorfismo è semplice in ogni caso.

3. Visto che conosciamo la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche, per trovare l'immagine $f(\underline{X})$ basta calcolare $A'\underline{X}$. Utilizzando la matrice si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 \\ k - 2 & 2 - k & 2 - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = ky \\ y_2 = ky \\ y_3 = (k - 2)x + (2 - k)y + (2 - k)z \end{pmatrix}$$

In sostanza si deve porre

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ky = 0 \\ (k - 2)x + (2 - k)y + (2 - k)z = 0 \end{cases}$$

Dalla prima si deduce o $k = 0$ oppure $y = 0$.

Se $k = 0$ il sistema si riduce all'equazione $-x + y + z = 0$, che risulta essere il sottospazio V cercato.

Se $y = 0$ si ha $\begin{cases} y = 0 \\ (k - 2)x + (2 - k)z = 0 \end{cases}$. Ed allora se $k - 2 = 0$ il sistema si riduce a

$y = 0$ che è il sottospazio V cercato. Se invece $k - 2 \neq 0$, il sottospazio V è $\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

1. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ la cui equazione è

$$(h + 1)x^2 + (h - 1)y^2 - h = 0.$$

Determinare i punti base, le coniche spezzate e caratterizzare le coniche del fascio.

2. Trovare e studiare la conica passante per il punto $P = (2, 0, 0)$. In particolare trovare i fuochi e l'eccentricità.
3. Trovare e studiare le quadriche Q contenenti la conica $\Gamma \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 7y^2 - 4 = 0, \end{cases}$ passanti per $T = (0, 0, 1)$ ed aventi ivi piano tangente $z - 1 = 0$.

Risoluzione

1. Ovviamente si lavora nel piano $z = 0$. Il fascio si può scrivere:

$$h(x^2 + y^2 - 1) + x^2 - y^2 = 0$$

Quindi due coniche del fascio sono la circonferenza di centro O e raggio 1 e la conica spezzata nella coppia delle bisettrici. Quindi i punti base si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y = \pm x \end{cases}$$

Un facile calcolo mostra che tali punti sono i 4 punti: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$; $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Le coniche spezzate sono le rette che congiungono i punti base. Precisamente le coppie di rette: $(x + \frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$; $(y + \frac{\sqrt{2}}{2})(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$; $x^2 - y^2 = 0$.

La matrice della generica conica del fascio è $B = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$. Inoltre $|A| = h^2 - 1$.

Nel fascio le iperboli si ottengono per $h^2 - 1 < 0$, cioè per $-1 < h < 1$.

Nel fascio le ellissi si ottengono per $h^2 - 1 > 0$, cioè per $h < -1, h > 1$.

Nel fascio non ci sono parabole, perchè quei valori di h che annullano il determinante di A annullano anche il determinante di B e sono quindi coniche spezzate.

2. Imponendo il passaggio per il punto $P = (2, 0)$, si ottiene la conica $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 7y^2 - 4 = 0 \end{cases}$.

Si tratta ovviamente di una ellisse che, in forma canonica si può scrivere: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{7}} = 1$. I

fuochi hanno coordinate $(\pm c, 0)$ dove $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{24}{7}}$.

L'eccentricità $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{6}{7}}$.

3. Tutte le quadriche contenenti la conica Γ sono tutte e sole quelle del tipo

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 + 7y^2 - 4 = 0$$

Imponendo il passaggio per il punto dello spazio $(0, 0, 1)$ si ha la condizione: $c + d - 4 = 0$.

La matrice B della quadrica è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 7 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

Il piano tangente si calcola con la formula

$$(0, 0, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 7 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Si ottiene l'equazione $\frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y + (c + \frac{d}{2})z + \frac{d}{2} - 4 = 0$. Tenendo conto della condizione già trovata; $c + d - 4 = 0$, ed imponendo che i coefficienti del piano tangente trovato siano proporzionali a quelli del piano $z - 1 = 0$, si ha che $a = 0$, $b = 0$, $c = 4 - d$. In definitiva si ottiene il fascio di quadriche

$$z((4 - d)z + d) + x^2 + 7y^2 - 4 = 0$$

La matrice della generica quadrica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 - d & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

Un facile calcolo mostra che $|B| = -\frac{7}{4}(d - 8)^2$; $|A| = d - 4$.

In conclusione

Per $d = 8$ si ha un cono.

Per $d = 4$ si un paraboloido ellittico.

Per $d \neq 4, 8$ si hanno sempre iperboloidi ellittici.