

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Classe Ingegneria Industriale-(A-F)

Prova scritta di esonero II di **Geometria** assegnata il 7-12-02

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

Date le due rette

$$r \begin{cases} x = -t \\ y = h + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad s \begin{cases} x = k - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

- a) Dire per quali valori di h e k le due rette sono complanari.
- b) Per $h = 1$ e $k = 1$ trovare il piano che le contiene entrambe.
- c) Trovare l'angolo formato dalle due rette.

Risoluzione

- a) Dopo avere scritto le due rette come intersezioni di due piani, la condizione di complanarità si ha quando il determinante della matrice 4×4 formata dai coefficienti dei 4 piani risulta zero. Eliminando i parametri si ottengono le due rette nella forma

$$r \begin{cases} x + y - h = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ed } s \begin{cases} x + z - k = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

Basta calcolare il determinante, sommando alla terza riga la seconda, e applicando il I teorema di Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -h \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -h \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -k+1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -h+1 \\ 2 & 0 & -k+1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -k+1+2h-2 = 2h-k-1$$

In definitiva la condizione di complanarità è data da $2h - k - 1 = 0$.

- b) Per $h = 1$ e $k = 1$ la condizione di complanarità è verificata. Per trovare il piano che contiene entrambe le rette basta considerare il piano contenente r e un qualunque punto di s .

Quindi imponiamo che il generico piano del fascio $\lambda(x + y - 1) + \mu(x - z + 1) = 0$ passi per $(1, 1, 0) \in s$. Si ottiene $\lambda + 2\mu = 0$. Da cui $\lambda = -2\mu$. Dall'equazione del fascio si ha il piano $x + 2y + z - 3 = 0$.

- c) I numeri $(-1, 1, -1)$, e $(-1, 0, 1)$ sono rispettivamente parametri direttori di r e di s , cioè componenti di vettori paralleli ad r e ad s . Il loro prodotto scalare è zero, quindi le due rette sono ortogonali.

II

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}.u.$

Dato il fascio di coniche

$$(1+h)x^2 - 2(1-h)xy + (1+h)y^2 - x + y - 2 = 0.$$

1. Determinare i punti base e le coniche spezzate del fascio.
2. Determinare, al variare di h , tutte le coniche del fascio.
3. In particolare detta γ la conica che si ottiene per $h = -1$, trovare una sua forma canonica e il cambiamento di coordinate che permette di ottenerla.

Risoluzione

1. L'equazione del fascio si può riscrivere nella forma

$$h(x^2 + 2xy + y^2) + x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 2 = 0$$

da cui si deduce che la retta doppia $(x+y)^2 = 0$ è una delle coniche spezzate del fascio.

La matrice B della conica è data da $B = \begin{pmatrix} 1+h & h-1 & -\frac{1}{2} \\ h-1 & 1+h & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$. Dopo semplici calcoli si vede che $|B| = 0$ per $h = 0$. In definitiva le coniche spezzate si ottengono per $h = 0$ e per $h = \infty$ contata due volte.

Vediamo come si spezza la conica $x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 2 = 0$. Essa si può scrivere $x^2 - (2y+1)x + y^2 + y - 2 = 0$, da cui $x = \frac{2y+1 \pm \sqrt{4y^2+4y+1-4y^2-4y+8}}{2}$. Quindi l'equazione della conica si può fattorizzare nel seguente modo:

$$(x - y + 1)(x - y - 2) = 0.$$

I punti base si ottengono dai sistemi

$$\begin{cases} y = -x \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Quindi sono $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $B = (1, -1)$, ciascuno contato due volte.

2. Poichè $|A| = 4h$ si deduce che nel fascio si hanno

Ellissi per $h > 0$ **Iperboli** per $h < 0$. Non ci sono parabole perchè $|A| = 0$ per il valore $h = 0$, per cui si annulla anche $|B|$.

3. Per $h = -1$ si ottiene la conica $4xy + x - y + 2 = 0$. Si calcola subito il $|B| = -9$ e $|A| = -4$. Si tratta di una iperbole equilatera, perchè la $Tr(A) = 0$.

Usando gli invarianti ortogonali si ha che: $-\alpha\beta\gamma = -9$ $\alpha\beta = -4$. Da ciò si deduce $\gamma = -\frac{9}{4}$. Calcoliamo adesso il polinomio caratteristico della matrice A . Si ottiene

$|A - TI| = \begin{vmatrix} -T & 2 \\ 2 & -T \end{vmatrix} = T^2 - 4 = 0$. Gli autovalori sono quindi $\alpha = 2$ e $\beta = -2$. I relativi autospazi sono $V_\alpha : x - y = 0$ e $V_\beta : x + y = 0$. Gli autovettori sono rispettivamente $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, -1)$, che normalizzati ci danno le colonne della matrice della rotazione. Si ottiene $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Le coordinate del centro di simmetria si trovano dal sistema $\begin{cases} 2y + \frac{1}{2} = 0 \\ 2x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$.

Quindi la matrice della rototraslazione è $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La forma canonica che si ottiene è $2X^2 - 2Y^2 = -\frac{9}{4}$. Cioè $\frac{-X^2}{\frac{9}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{9}{8}} = 1$

III

Facoltativo Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

Data la conica $\Gamma \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - x - y = 0. \end{cases}$

Trovare e studiare le quadriche Q contenenti Γ e tali che la sezione di Q col piano $x = 0$ sia la parabola passante per il punto $P = (0, -1, 1)$ ed avente punto improprio $(0, 1, -1, 0)$.

Risoluzione Le quadriche contenenti la conica Γ sono tutte e sole quelle la cui equazione è del tipo

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 - x - y = 0$$

Secondo col piano $x = 0$ si ottiene la conica del piano $x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ byz + cz^2 + dzt + y^2 - yt = 0 \end{cases}$$

Imponendo il passaggio per i due punti l'uno proprio e l'altro improprio si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -b + c + 1 = 0 \\ -b + c + d + 2 = 0 \end{cases}$$

Da ciò si ha: $d = -1$, e $b = c + 1$. Si ottiene la generica conica $(c + 1)yz + cz^2 - z + y^2 - y = 0$. In questa equazione ponendo $|A| = 0$ si ottiene una parabola. Mediante un facile calcolo si ha: $c = -1$.

In definitiva si ottengono le condizioni: $a = a$, indeterminato, $b = 0$, $c = -1$, $d = -1$, e la generica quadrica richiesta è

$$axz - z^2 - z + x^2 + y^2 - x - y = 0.$$

Il determinante della generica quadrica è $|B| = \frac{(a-2)^2}{16}$, mentre $|A| = \frac{-(a^2+4)}{4}$.

Si conclude che per $a = 2$ si ottiene un **cono**.

Per $a \neq 2$ si hanno sempre **iperboloidi iperbolici**.