FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio

Seconda prova scritta di esonero di **Algebra lineare e Geometria** assegnata il 16/06/04

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

1. Trovare l'equazione del piano passante per il punto $A = (1, 0, -1)$ parallelo alle rette di equazioni

$$r) \quad \begin{cases} x - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases} \qquad\qquad s) \quad \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= t \\ z &= -1 + t \end{cases}$$

Risoluzione
Detti (a, b, c) i coefficienti dell' equazione del piano questi dovranno essere parametri direttori di un vettore normale ad entrambi i vettori direttivi delle due rette. Questi sono rispettivamente $(1, -1, 1)$ e $(-1, 1, 1)$. Si ottiene il sistema $\begin{cases} a - b + c &= 0 \\ -a + b + c &= 0 \end{cases}$. Il piano cercato ha equazione $x - 1 + y = 0$

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$(1 + h)x^2 - y^2 + (h + 2)y - 1 - h = 0$$

In particolare determinare i punti base, le coniche spezzate e tutte le coniche del fascio.

Risoluzione
Troviamo innanzitutto i punti base. Risolviamo il sistema formato dalle equazioni $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$ e $x^2 + y - 1 = 0$ con cui è formato il fascio. È facile vedere che i punti base sono: il punto $(0, 1)$ contato due volte e i punti $(-1, 0); (1, 0)$. Quindi le coniche spezzate sono:

$$(y - 1)y = 0; \quad (x - y + 1)(x + y - 1 = 0$$

questa ultima viene computata due volte nel computo delle coniche spezzate.
La matrice B della conica è $B = \begin{pmatrix} 1 + h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{h+2}{2} \\ 0 & \frac{h+2}{2} & -1 - h \end{pmatrix}$. Il determinante $|B| = (1 + h)(h + 1 - (\frac{h+2}{2})^2)$. Si vede subito che $|B| = 0$ per $h = -1$ e $h = 0$. Si ha $|A| = -1 - h$. Quindi per $h \neq 0. - 1$, si hanno **ellissi** per $b < -1$. Si hanno **iperboli** per $h > -1$. Non si hanno parabole perchè il valore di h che annulla $|A|$ annulla anche $|B|$.

3. Trovare la conica del fascio passante per $P = (1, 3)$, e determinare una sua forma canonica e il cambiamento di coordinate che l'ha determinata.

Risoluzione
Se si impone il passaggio per il punto $P = (1, 3)$ si ha: $1 + h - 9 + 3h + 6 - 1 - h = 0$. Da cui $h = 1$.
Si ottiene la conica del piano $z = 0$ di equazione $2x^2 - y^2 + 3y - 2 = 0$. La matrice della conica è $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$. $|B| = 4 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{2}$, mentre $|A| = -2$. Quindi la nostra conica è una iperbole. La sua forma canonica è del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$. Scriviamo la matrice caratteristica $|A - TI| = \begin{vmatrix} 2 - T & 0 \\ 0 & -1 - T \end{vmatrix}$. Gli autovalori sono $\alpha = 2; \beta = -1$.

Per determinare γ, usiamo gli invarianti ortogonali. $|B| = -\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{2}$; $\quad \alpha\beta = -2$; da cui $\gamma = -\frac{1}{4}$. Possiamo scrivere l'equazione dell'iperbole nella forma $\frac{X^2}{\frac{-1}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

Il centro di simmetria è $C = (0, \frac{3}{2})$. Poichè l' equazione della nostra conica non ha termini misti non si deve fare alcuna rotazione degli assi. In definitiva la matrice Q della rototraslazione è $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I punti impropri della nostra iperbole sono i punti $(1, \sqrt{2}, 0)$ e $(1, -\sqrt{2}, 0)$. Gli asintoti sono le rette $y - \frac{3}{2} = \sqrt{2}\ x$ e $y - \frac{3}{2} = -\sqrt{2}\ x$.

L' asse trasverso (su cui stanno i fuochi reali) è l'asse $\vec{Y}$. Il grafico si deduce facilmente.

4. Detta $\underline{c}$ la circonferenza del fascio, determinare e studiare le quadriche, a coefficienti reali, contenenti $\underline{c}$, passanti per i punti $E = (0, 0, 1)$ e $F = (1, 1, 1, 0)$ ed aventi l' origine delle coordinate come centro di simmetria.

Risoluzione

La circonferenza del fascio ha equazioni $\begin{cases} z & = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 & = 0 \end{cases}$.

Tutte le quadriche contenenti la circonferenza hanno equazione del tipo

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Imponendo che il centro di simmetria sia l'origine delle coordinate si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 1 & \frac{d}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da ciò si deduce $d = 0$. Imponendo il passaggio per il punto $E = (0, 0, 1)$ si ottiene $c + d - 1 = 0$. Dopo avere scritto l'equazione della generica quadrica in coordinate omogenee, imponendo il passaggio per il punto improprio $F = (1, 1, 1, 0)$ si ha $a + b + c + 2 = 0$. In definitiva si ottiene che la generica quadrica ha equazione: $axz - (a + 3)yz + x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

La matrice B della generica quadrica è $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-(a+3)}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{-(a+3)}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il determinante di B è $|B| = \frac{2a^2+6a+5}{4}$. Il determinante di A è $|A| = -|B|$. Il trinomio a numeratore ha il discriminante $\Delta < 0$, quindi il trinomio, per a reale, è sempre positivo. Ne segue che tutte le quadriche del fascio sono tutte **iperboloidi iperbolici**.