

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 1/03/04

COMPITO A

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare avente

- $v_1 = (1, 0, 1)$ come autovettore associato all'autovalore $T = h$;
- $v_2 = (1, 1, -1)$ come autovettore associato all'autovalore $T = 2 - h$;
- $v_3 = (1, 1, 1)$ come un elemento del $\text{Ker}(f)$.

1. Studiare tale applicazione determinando, al variare di h , una base di $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.
2. Studiare la semplicità di f , al variare di h .
3. Determinare, al variare di h , il sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^3$, tale che $f(V) \subseteq W$, dove $W = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_3 = 0\}$.

Risoluzione

In base ai dati, per definizione si ha che:

$$f(v_1) = hv_1; \quad f(v_2) = (2 - h)v_2; \quad f(v_3) = 0$$

1. L'applicazione f è perfettamente determinata in quanto le precedenti relazioni assegnano le immagini dei vettori di una base. Per studiare l'applicazione lineare bisogna introdurre una matrice associata all'applicazione lineare, rispetto a delle opportuni basi, una nel dominio e l'altra nel codominio. Quando si conoscono degli autovettori è ovvio che bisogna scegliere una base del dominio e codominio che contenga questi autovettori, perchè in tal caso la matrice ottenuta conterrà molti zeri e quindi sarà più facile da trattare.

Quindi detta $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ si ha che la matrice associata è $M(f)^{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2 - h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Per $h \neq 0, 2$ il rango è 2. Quindi $\dim \text{Im}(f) = 2$ e una base dell'immagine è data $\langle v_1, v_2 \rangle$, come si vede dalle relazioni che definiscono f . Per trovare il $\text{Ker} f$ basta risolvere il sistema omogeneo costruito sulla matrice e si trova $x = 0$; $y = 0$. Quindi una base del nucleo si trova prendendo, per esempio, il vettore che ha rispetto alla base $\mathcal{B}$ le componenti $(0, 0, 1)$. Si trova v_3 .

- b) Se $h = 0$, la matrice diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi $\text{Im}(f) = \langle v_2 \rangle$. Per il $\text{Ker}(f)$ dal sistema si trova $y = 0$ e quindi come base del nucleo si possono prendere i vettori di componenti $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$; cioè v_1 e v_3 .

- c) Per $h = 2$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

È immediato che una base per $Im(f) = \langle v_1 \rangle$ e una base per $Ker(f) = \langle v_2, v_3 \rangle$.

2. Scriviamo la matrice caratteristica $\begin{pmatrix} h-T & 0 & 0 \\ 0 & (2-h)-T & 0 \\ 0 & 0 & -T \end{pmatrix}$. È immediato calcolare

gli autovalori; essi sono $T_1 = 0$; $T_2 = h$; $T_3 = 2-h$. Essi sono tutti reali. Per i valori di h per cui essi sono anche distinti si sa che l'endomorfismo è semplice. Vediamo quando si hanno autovalori multipli. Esaminiamo tutti i casi che si possono presentare.

- i) $T_1 = T_2$, e ciò per $h = 0$; ne segue $T_3 = 2$. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio

relativo all'autovalore $T = 0$. La matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed ha

rango 1. Quindi la $\dim V_0 = 3 - 1 = 2$.

In tal caso l'endomorfismo è semplice.

- ii) $T_1 = T_3 = 0$ e ciò per $h = 2$. La matrice caratteristica diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed ha

rango 1. Quindi la $\dim V_0 = 3 - 1 = 2$.

Anche in tal caso l'endomorfismo è semplice.

- iii) $T_2 = T_3 \Leftrightarrow h = 2-h \Leftrightarrow h = 1$. Si ha $T_2 = T_3 = 1$. Anche in tal caso l'endomorfismo è semplice.

- iv) Per $h \neq 0, 1, 2$ gli autovalori sono tutti reali e distinti e l'endomorfismo è semplice.

In conclusione l'endomorfismo è sempre semplice.

3. Diciamo (x, y, z) le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, del generico vettore $v \in V$.

Per calcolare $f(v)$ basta moltiplicare la matrice $A = M(f)^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ per il vettore $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Nel nostro caso si ha

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2-h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = hx \\ y_2 = (2-h)y \\ y_3 = 0 \end{pmatrix}.$$

Il vettore $\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ fornisce le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, del vettore $f(v)$.

Quindi $f(v) = hxv_1 + (2-h)v_2 = hx(1, 0, 1) + (2-h)(1, 1, -1) = (hx + (2-h)y, (2-h)y, hx + (h-2)y)$. Imponendo che tali componenti soddisfino $y_1 + y_3 = 0$ si ha, nel nostro caso: $hx + 2y - hy + hx + hy - 2y = 0$ cioè $2hx = 0$.

Per $h = 0$ la precedente è una identità, e quindi il sottospazio V coincide con tutto $\mathbb{R}^3$.

Se $h \neq 0$ segue $x = 0$ e quindi V si ottiene da $yv_2 + zv_3$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

1. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$(h+1)x^2 + (1-h)y^2 - 4x + 2 = 0$$

caratterizzando tutte le coniche del fascio e determinando i punti base e le coniche spezzate.

2. Detta $\wp$ la parabola del fascio, determinare le quadriche contenenti $\wp$ ed aventi in $Z_\infty = (0, 0, 1, 0)$ come piano tangente il piano $x + y = 0$.
3. Provare che le quadriche ottenute sono tutte degeneri. Trovare i rispettivi vertici ed il luogo da essi descritto.

Risoluzione L'equazione del fascio si può scrivere:

$$h(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$$

La conica che è a fattore di h , $x^2 - y^2 = 0$, si spezza nelle rette $(x - y)(x + y) = 0$. L'altra conica con cui è formato il fascio: $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ è la circonferenza di centro $C = (2, 0)$ e raggio $r = \sqrt{4 - 2}$.

1. Per trovare i punti base basta intersecare le due precedenti coniche. Si trova

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad m=2$$

Analogamente $\begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \quad m=2$. Si può concludere che le due rette di equazioni $x = \pm y$ sono tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$. La conica congiungente i punti base $x = 1$, contata due volte, è un'altra conica spezzata.

La matrice della conica è $B = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & -2 \\ 0 & 1-h & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si deduce $|B| =$

$2(1+h)(1-h) - 4(1-h) = 2(1-h)(1+h-2) = -2(1-h)^2$. Si può affermare che per $h \neq 1$ si hanno coniche irriducibili. $|A| = 1 - h^2$. In definitiva si hanno

Ellissi per $1 - h^2 > 0 \Rightarrow -1 < h < 1$

Iperboli per $1 - h^2 < 0 \Rightarrow h < -1$ e $h > 1$

Parabola per $h = -1$. Per $h = 1$ il determinante di B è zero e si ha una conica spezzata.

La parabola $\wp$ del fascio ha equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ y^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$.

2. Le quadriche che contengono $\wp$ sono tutte e sole quelle la cui equazione è del tipo

$$z(ax + by + cz + d) + y^2 - 2x + 1 = 0$$

Dopo avere scritto la precedente in coordinate omogenee: $z(ax + by + cz + dt) + y^2 - 2xt + t^2 = 0$, imponendo il passaggio per $Z_\infty = (0, 0, 1, 0)$ si trova che dev'essere $c = 0$. Il piano tangente in Z_∞ è dato da

$$(0, 0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 0 & \frac{d}{2} \\ -1 & 0 & \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

cioè $ax + by + d = 0$. Per identificare questa all'equazione richiesta basta porre $d = 0$; $b = a$. Il fascio di quadriche $\mathcal{Q}$ trovato è $z(ax + ay) + y^2 - 2x + 1 = 0$.

3. Troviamo la matrice B della generica quadrica $\mathcal{Q}$. Si ha $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il

$|B| = 0$ sempre per ogni a . Il $|A| = -\frac{a^2}{4}$.

Per $a \neq 0$ si hanno coni. Per $a = 0$ si ha un cilindro che però si deve scartare dalle nostre considerazioni perchè per esso Z_∞ è vertice e il piano tangente nel vertice non è definito.

Per trovare il luogo dei vertici basta risolvere per $a \neq 0$ il sistema $\begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \\ y + \frac{a}{2}z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$. Si

trova $\begin{cases} z = \frac{2}{a} \\ y = -\frac{a}{2} \frac{2}{a} = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Il luogo dei vertici è quindi la retta di equazioni $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.