FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria-Edile-Architettura**

Prova di esonero di **Geometria I** assegnata il 21/11/2003

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.
Si consideri la retta $\underline{r} \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ e il punto $A=(0,0,1)$.

1. Determinare le rette passanti per A e perpendicolari ad $\underline{r}$.
2. Trovare il luogo descritto da tali rette.
3. Fra i piani contenenti $\underline{r}$ determinare quelli che distano $d=\frac{1}{\sqrt{3}}$ dall'origine O.
4. Trovare la retta $\underline{r}'$ simmetrica di $\underline{r}$ rispetto ad O.
5. Trovare il luogo dei punti P dello spazio equidistanti dai piani $x=0$ e $y=0$.

Risoluzione

1. La generica retta passante per A ha equazioni $\begin{cases} x=lt \\ y=mt \\ z=1+nt \end{cases}$; i parametri direttori di r sono $(1,-1,-1)$. Per avere rette ortogonali ad r basta imporre che sia $l-m-n=0$. Quindi le rette cercate hanno equazioni $\begin{cases} x=mt+nt \\ y=mt \\ z-1=nt \end{cases}$.
2. Il luogo descritto da tali rette si trova eliminando i parametri dall'ultimo sistema; si ottiene $x-y-z+1=0$.
3. Tutti i piani contenenti r hanno equazione che si trova dalla combinazione lineare
$$\lambda(x+2y-z)+\mu(x+y-1)=0;$$
questa equazione si pu anche scrivere
$$(\lambda+\mu)x+(2\lambda+\mu)y-\lambda z-\mu=0.$$
Imponendo che il generico piano disti $\frac{1}{\sqrt{3}}$ dall'origine delle coordinate O, si ha $\frac{|\mu|}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2+(2\lambda+\mu)^2+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Da un semplice calcolo si ottiene: $6\lambda^2+6\lambda\mu-\mu^2=0$. Quindi i due piani cercati hanno equazioni che si ottengono dall'equazione del fascio ponendo $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{6}$.
4. Il simmetrico di $P=(x,y,z)$ è $P'=(-x,-y,-z)$. Quindi la retta r' si ottiene cambiando le variabili in r. Si ottiene $r' \begin{cases} x+2y-z-0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$.
5. Il luogo dei punti $P=(x.y,z)$ equidistanti da $x=0$ e $y=0$ si ottiene da $|x|=|y|$. Si ottiene la coppia di piani: $x=\pm y$.

II

1. Studiare, al variare di h, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice $A = M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}$, determinando in ogni caso una base di $Kerf$ e di Imf.

2. Determinare, al variare di h, l'inversa della matrice A, possibilmente mediante l'uso di un opportuno sistema ad incognite vettoriali.

Risoluzione

1. È conveniente, per la riduzione, prendere sulla prima riga $-h$ come elemento speciale. Ed allora se $h = 0$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il rango è due e una base dell'immagine è $(1, 0, 1); (0, 1, 0)$. Il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo costruito sulla matrice ridotta. Si ha la soluzione $(0, 0, z)$; quindi una base del nucleo è $(0, 0, 1)$.
   Se $h \neq 0$,sommando alla terza la prima riga si ha $\begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ 2 & h & 0 \end{pmatrix}$ ed adesso sottraendo alla terza riga la seconda moltiplicata per h si ha la matrice ridotta $\begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ 2-h^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   In definitiva per $h \neq \pm\sqrt{2}$ la nostra applicazione è un isomorfismo.
   Per $h = -\sqrt{2}$ si ha la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Una base dell'immagine è data, per esempio, dalla prime due colonne della matrice data per $h = -\sqrt{2}$, quindi da $(1, -\sqrt{2}, 2); (-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$. Una base del nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo costruito sulla amtrice ridotta. Semplici calcoli ci danno la soluzione $(\sqrt{2}, 2, 1)$.

   Per $h = \sqrt{2}$ si procede in modo analogo e viene lasciato allo studente per esercizio.

2. La matrice data è invertibile se il suo rango è massimo. Quindi per $h \neq 0, \pm\sqrt{2}$.
   Si può impostare il seguente sistema ad incognite vettoriali.

$$\begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   dove X_1, X_2, X_3 sono vettori riga a tre componenti, che poi saranno le tre righe della matrice cercata.
   Facendo la riduzione per righe in modo analogo a come si è operato per ridurre la matrice dei coefficienti si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & h & -h & | & 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & h & -h & | & 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2-h^2 & 0 & 0 & | & 1 & -h & 1 \end{pmatrix}$$

   Con calcoli elementari si trava che $A^{-1} = \frac{1}{(2-h^2)} \begin{pmatrix} 1 & -h & 1 \\ -h & 2 & -h \\ \frac{-1}{h} & 1 & \frac{1-h^2}{h} \end{pmatrix}$