Corsi di Laurea in Ing. Civile e Gestionale. Compito di **Geometria** del il 11/09/02

I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ mediante le relazioni

$$\begin{array}{l} f(2,2,1) = (0,0,1) \\ f(1,2,1) = (-1, h-1, h) \\ f(1,2,2) = (1, h+1, h+1) \end{array}$$

con h parametro reale.
1) Determinare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica.
2) Studiare f al variare di h, determinando in ciascun caso $Im\, f$ e $Ker\, f$.
3) Verificare che f è semplice e che esiste una base di autovettori indipendente da h.
4) Determinare, al variare di h, il sottoinsieme

$$f^{-1}(e_3) = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f(v) = e_3\}$$

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$.
1) sono date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

Dopo aver verificato che queste rette sono sghembe si consideri il punto generico $R \in \mathbf{r}$ e si determini la retta $\mathbf{t}$ passante per R ortogonale ed incidente ad $\mathbf{s}$. Determinare la quadrica Q luogo delle rette $\mathbf{t}$ al variare di R su $\mathbf{r}$. Precisare la natura di Q.
2) Determinare e studiare, sul piano $z = 0$, il fascio Φ di coniche che ha i punti base $O \equiv (0,0)$, $A \equiv (1,1)$, $B \equiv (2,0)$, $C \equiv (3,1)$.
3) Determinare il cilindro che ha vertice $(1,0,1,0)$ e per direttrice l'iperbole equilatera di Φ.

SVOLGIMENTO

I

1) Per determinare $M(f)$ basta risolvere il facile sistema lineare ad incognite vettoriali

$$\begin{cases} 2f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) = (0,0,1) \\ f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) = (-1, h-1, h) \\ f(e_1) + 2f(e_2) + 2f(e_3) = (1, h+1, h+1) \end{cases} \Rightarrow \quad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1-h & h-2 & 2 \\ 1-h & h-1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Per studiare questo endomorfismo calcoliamo il determinante

$$|M(f)| = h - 2 + 4(h-1) - 2(h-1)^2 + 2(h-1)(h-2) - 4(h-1) =$$

$$= h - 2 + 2(h-1)(2 - h + 1 + h - 2 - 2) = -h$$

quindi dobbiamo discutere due casi:
$h \neq 0$ $\quad f$ è un isomorfismo;
$h = 0$ $\quad$ la matrice diviene

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che chiaramente ha rango 2. $Im\, f = \mathcal{L}(C_1, C_2)$; per determinare il nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo associato ad $M(f)$:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow Ker\, f = \{(0, y, y)\} \text{ con base } (0, 1, 1)$$

3) Calcoliamo il polinomio caratteristico di f

$$\begin{vmatrix} 1-T & -2 & 2 \\ 1-h & h-2-T & 2 \\ 1-h & h-1 & 1-T \end{vmatrix} =$$

$$= (1-T)^2(h-2-T) + 4(h-1) - 2(h-1)^2 + 2(h-1)(h-2-T) - 4(h-1)(1-T) =$$
$$= -T^3 + hT^2 + T - h = -(T-1)(T+1)(T-h)$$

Abbiamo trovato gli autovalori $T = 1$, $T = -1$, $T = h$. Se $h \neq \pm 1$ i tre autovalori sono distinti, quindi f è semplice. In questo caso calcoliamo gli autospazi.

$T = 1$ Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1-h & h-3 & 2 \\ 1-h & h-1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \{(x, x, x)\} \text{ con base } u_1 = (1, 1, 1).$$

$T = -1$ Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1-h & h-1 & 2 \\ 1-h & h-1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ (1-h)x - (1-h)y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + z \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi $V_{-1} = \{(x, x, x)\}$ con base $u_2 = (1, 1, 1)$.

$T = h$ Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1-h & -2 & 2 \\ 1-h & -2 & 2 \\ 1-h & h-1 & 1-h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-h)x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + z \\ x = 0 \end{cases}$$

quindi $V_h = \{(0, z, z)\}$ con base $u_3 = (0, 1, 1)$.

La base di autovettori che abbiamo trovato non dipende dal parametro, quindi continua ad essere tale anche nei casi particolari $h = \pm 1$. In particolare f risulta semplice per ogni valore di h.

4) Dobbiamo risolvere il sistema lineare la cui matrice completa è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1-h & h-2 & 2 & 0 \\ 1-h & h-1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -h & h & 0 & 0 \\ 1-2h & 2h & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{h\neq 0}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -h & h & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

quindi per $h \neq 0$ dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(e_3) = (2, 2, 1)$$

Nel caso $h = 0$ consideriamo la matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(e_3) = \{(2, 1 + z, z)\}$$

1) Le rette assegnate hanno punti impropri distinti, $R_\infty \equiv (1,0,0,0)$, $S_\infty \equiv (1,0,1,0)$ e palesemente non hanno nessun punto proprio comune, quindi esse sono sghembe.

Il punto generico di $\mathbf{r}$ è $R \equiv (\alpha, 0, 0)$ e la retta generica per R ha equazioni

$$\mathbf{t} : \begin{cases} x - \alpha = mz \\ y = nz \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad T_\infty \equiv (m, n, 1, 0)$$

Imponendo che $\mathbf{t} \perp \mathbf{s}$ si trova la condizione $m + 1 = 0$; per imporre che $\mathbf{t}$ sia incidente ad $\mathbf{s}$ dobbiamo richiedere che sia risolubile il sistema

$$\begin{cases} x - \alpha = -z \\ y = nz \\ x = z \\ y = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{\alpha}{2} \\ n\alpha = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{t} : \begin{cases} x + z = \alpha \\ \alpha y - 2z = 0 \end{cases}$$

Per trovare il luogo descritto da $\mathbf{t}$ dobbiamo eliminare il parametro α dalle sue equazioni; si trova la quadrica Q di equazione

$$xy + yz - 2z = 0$$

Per capire di che quadrica si tratta osserviamo che la matrice associata a Q

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 4 e che la sottomatrice A ha gli autovalori 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi la quadrica Q è un paraboloide iperbolico.

2) Ci poniamo sul piano coordinato $z = 0$. Il fascio Φ è generato da due delle tre coniche spezzate distinte (perché i punti base sono distinti) del fascio: usiamo le coniche $OB \cup AC$, di equazione $y(y-1) = 0$ e $OA \cup BC$ di equazione (x-y)(x-y-2)=0. La terza conica spezzata si può calcolare direttamente oppure si può trovare come conica spezzata di Φ.

$$\Phi : (x-y)(x-y-2) + hy(y-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 2xy + (1+h)y^2 - 2x + (2-h)y = 0$$

Per costruzione i valori $h = 0$ e $h = \infty$ producono coniche spezzate; per determinare la terza conica spezzata e per studiare le coniche irriducibili di Φ consideriamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1+h & \frac{2-h}{2} \\ -1 & \frac{2-h}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |B| = -\frac{1}{4}h(h+4), \ |A| = h$$

Per $h = -4$ si ottiene la conica spezzata $OC \cup AB$; quanto alle coniche irriducibili avremo:
$h > 0$ $\quad |A| > 0$ si trovano ellissi. Non ci sono circonferenze;
$h < 0$ $\quad |A| < 0$ si trovano iperboli. Per $h = -2$ si ottiene l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - 2xy - y^2 - 2x = 0$.

Nel fascio non ci sono parabole.

L'iperbole equilatera di Φ ha equazioni

$$\Gamma : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 - 2xy - y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

e la generica retta passante per il vertice $(1, 0, 1, 0)$ ha equazioni

$$\begin{cases} x - z = h \\ y = k \end{cases}$$

Secando questa retta col piano $(z = 0)$ di Γ si trova il punto $(h, k, 0)$ ed imponendo che questo punto appartenga a Γ si ha la condizione $h^2 - 2hk - k^2 - 2h = 0$; eliminando i parametri h e k si ottiene l'equazione del cilindro:

$$(x - z)^2 - 2y(x - z) - y^2 - 2(x - z) = 0$$