

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Elettronica**

Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 12/07/2001,

1-Durata della prova: tre ore.

2-Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

3-Si possono consultare solo i libri di testo.

4-Usare solo la carta fornita dal Dipartimento.

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

1. Studiare il fascio delle coniche bitangenti alle due rette

$$\begin{cases} x = 0 \\ z - 2y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

nei punti in cui tali rette sono incontrate dall'asse $\vec{y}$.

2. Determinare l'iperbole equilatera γ e la parabola $\wp$ di tale fascio.
3. Trovare la quadrica Q di rotazione della parabola $\wp$ attorno al suo asse e caratterizzare i piani che secano Q in parabole.
4. Fra le quadriche Q' contenenti γ determinare quelle passanti per $X_\infty = (1, 0, 0, 0)$ ed aventi ivi come piano tangente il piano $y + z + 1 = 0$. Provare che in Q' ci sono "essenzialmente" paraboloidi iperbolici.

Risoluzione

1. Il fascio si può individuare mediante le due coniche: quella spezzata nelle due tangenti e quella costituita dalla congiungente i punti di contatto contata due volte. Quindi si ha

$$\begin{cases} x = 0 \\ (z + 2 - 2y)(z + 2 + 2y) + \lambda z^2 = 0 \end{cases}$$

La matrice della generica conica del fascio è $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$|B| = -16\lambda$; $|A| = -4(\lambda + 1)$. In conclusione si hanno:

ellissi per $\lambda < -1$; si hanno **iperboli** per $\lambda > -1$: si ha una **parabola** per $\lambda = -1$.

Si ha una iperbole equilatera γ se la $Tr(A) = 0$, cioè per $\lambda = 3$.

2. Le equazioni di $\wp$ e di γ sono rispettivamente

$$\begin{cases} x = 0 \\ z + 1 - y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z^2 - y^2 + z + 1 = 0. \end{cases}$$

3. L'asse della parabola è l'asse delle $\vec{z}$. La superficie di rotazione di $\wp$ attorno all'asse delle $\vec{z}$ è il luogo descritto dalle circonferenze che si ottengono col seguente metodo. Sia $G = (0, \beta, \gamma)$ il generico punto sulla parabola. Sia π il piano passante per G e perpendicolare all'asse della parabola. Tale piano incontra $\vec{z}$ in $C = (0, 0, \gamma)$. La circonferenza che descrive il luogo si ottiene secando π con la sfera di centro C e raggio CG . Quindi il luogo si ottiene eliminando i parametri dal sistema seguente

$$\begin{cases} \gamma + 1 - \beta^2 = 0 & (\text{condizione di appartenenza di } G \text{ a } \wp) \\ z = \gamma \\ x^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 = \beta^2 \end{cases}$$

Si ottiene $Q : x^2 + y^2 - z - 1 = 0$. Tale quadrica è un paraboloide ellittico. I piani che secano Q in parabole sono tutti e soli i piani che secano Q in una conica irriducibile e la C_∞ di Q in due punti reali e coincidenti. La C_∞ è data da $\begin{cases} t = 0 \\ (x + iy)(x - iy) = 0. \end{cases}$

Quindi il punto comune alle due rette è di coordinate $(0, 0, 1, 0)$. Il generico piano contenente il punto è $ax + by + dt = 0$. Si devono escludere i due fasci di piani aventi per asse le due rette in cui si spezza la C_∞ , perchè questi piani secano in coniche spezzate e non in parabole. Tali piani si escludono con la condizione che sia $b \neq \pm ai$

4. Le quadriche contenenti γ sono quelle la cui equazione è del tipo

$$x(ax + by + cz + dt) + z^2 - y^2 + zt + t^2 = 0$$

Perchè passino per X_∞ dev'essere $a = 0$. Il piano tangente in X_∞ ha equazione: $by + cz + d = 0$. Perchè coincida col piano $y + z + 1 = 0$ dev'essere $c = b = d$. Il fascio delle quadriche Q' ha equazione:

$$bx(y + z + 1) + z^2 - y^2 + z + 1 = 0.$$

Per $b = 0$ si ottiene $z^2 - y^2 + z + 1 = 0$, che è un cilindro iperbolico. Per $b \neq 0$ si ha una famiglia di cui la matrice generica è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{b}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Un semplice calcolo, ma attento, mostra che : $|B| = \frac{b^2}{16}$ e $|A| = 0$. La conclusione è che per $b \neq 0$ si hanno sempre paraboloidi iperbolici.

II

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $f(x, y, z) = (x + z, y - z, -x + y)$.

1. Determinare e studiare l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $(1, 0, 0)$; $(1, 1, 1)$; $(1, -1, 0)$ siano autovettori, per l'applicazione composta $(g \circ f)$, associati rispettivamente agli autovalori: 0 ; 1 ; $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Determinare il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^3$ tale che $g(V) = W$, dove $\{W \subset \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0; z = 0\}$.
3. Studiare la semplicità di $(f \circ g)$.

1. Si deve ricercare una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che la composizione con la f data abbia gli autovettori assegnati. Si ha quindi

$$(g \circ f)(1, 0, 0) = (0, 0, 0) \implies g(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

$$(g \circ f)(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \implies g(2, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

$$(g \circ f)(1, -1, 0) = (\lambda, -\lambda, 0) \implies g(1, -1, -2) = (\lambda, -\lambda, 0)$$

Per chiarezza: $(g \circ f)(1, 0, 0) = g(f(1, 0, 0)) = g(1, 0, -1)$, dove per calcolare $f(1, 0, 0)$ si è tenuto conto della definizione della f . Quindi

$$\begin{cases} g(e_1) = g(e_3) \\ g(e_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ g(e_1) - g(e_2) - 2g(e_3) = (\lambda, -\lambda, 0) \end{cases}$$

Si ottiene facilmente

$$\begin{cases} g(e_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ g(e_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ g(e_2) = (-\frac{1}{2} - \lambda, -\frac{1}{2} + \lambda, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

La matrice associata a g rispetto alle basi canoniche è

$$M(g) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Con le trasformazioni: $R_2 \longleftrightarrow R_2 - R_1$; $R_3 \longleftrightarrow R_3 - R_1$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = 0$ il rango della matrice è 1. Il $\ker(g)$ si ottiene dall'equazione $x - y + z = 0$ e l'immagine è generata dal vettore: $(1, 1, 1)$.

Per $\lambda \neq 0$ il rango è due. Il nucleo si ottiene dal sistema $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e l'immagine è generata dai vettori: $(1, 1, 1); (-\frac{1}{2} - \lambda, -\frac{1}{2} + \lambda, -\frac{1}{2})$.

2. Usando la matrice $M(g)$ si ha che

$$g(x, y, z) = (\frac{1}{2}x - (\frac{1}{2} + \lambda)y + \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x + (-\frac{1}{2} + \lambda)y + \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)$$

Per determinare V basta trovare quegli (x, y, z) per cui l'immagine secondo g soddisfi le equazioni cartesiane di W . Si ha così

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{y}{2} - \lambda y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x - \frac{y}{2} + \lambda y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Dal sistema si ottiene $x - y + z = 0$.

È importante osservare che perchè sia $g(V) = W$, bisogna tenere conto, nei vari casi, della dimensione dell'immagine della applicazione g .

Per $\lambda = 0$ abbiamo visto che l'immagine è data da $x = y; y = z$. In tal caso l'intersezione con W dà lo zero $(0, 0, 0)$. Quindi $x - y + z = 0$ viene il nucleo dell'applicazione g .

Per $\lambda \neq 0$ si ha $f(V) = W$, e V è dato da $x - y + z = 0$.

3. Per calcolare gli autovettori di $(f \circ g)$ si deve calcolare la matrice prodotto $M(f) \cdot M(g)$.

Eseguendo il prodotto di matrici si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \end{pmatrix}$. La matrice

caratteristica è $\begin{pmatrix} 1 - T & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - T & 0 \\ 0 & 2\lambda & -T \end{pmatrix}$. Si vede facilmente che gli autovalori sono:

0; 1; λ .

Se gli autovalori sono tutti distinti l'endomorfismo $(f \circ g)$ è semplice.

Per $\lambda = 0$ si ha un autovalore doppio. Calcoliamo la dimensione del corrispondente autospazio V_0 . La matrice caratteristica per $T = \lambda = 0$ è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il suo rango è 1 e quindi la $\dim V_0 = 3 - 1 = 2$.

Per $\lambda = 1$ si ha ancora un autovalore doppio. Calcoliamo la dimensione del corrispondente autospazio V_1 . La matrice caratteristica diventa per $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Quindi la dimensione $\dim V_1 = 3 - 1 = 2$.

In conclusione per ogni λ l'endomorfismo è sempre semplice.

III

Date le due forme quadratiche

$$q_1(x, y, z) = \frac{3}{2}x^2 + xz + \frac{3}{2}z^2 - y^2$$

$$q_2(x, y, z) = \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 - z^2$$

Provare che sono equivalenti, cioè che hanno una stessa forma canonica. **Indicare il modo** di determinare il cambiamento di coordinate che permette di trasformare l'una nell'altra, senza necessariamente effettuare il calcolo esplicito.

Risoluzione Le matrici caratteristiche associate alle due forme quadratiche sono

$$M_{q_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - T & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 - T & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} - T \end{pmatrix} \quad M_{q_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - T & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - T & 0 \\ 0 & 0 & -1 - T \end{pmatrix}$$

Le due matrici hanno gli stessi autovalori: 1; -1; 2. Una forma canonica per entrambe può essere: $D(X, Y, Z) = X^2 - Y^2 + 2Z^2$.

Per rispondere all'ultimo quesito si ragiona così. Sappiamo che è sempre possibile trovare una matrice ortogonale P_1 tale che $P_1^{-1}M_{q_1}P_1 = D$. Analogamente esiste una matrice ortogonale P_2 tale che $P_2^{-1}M_{q_2}P_2 = D$. Ne segue che $P_1^{-1}M_{q_1}P_1 = P_2^{-1}M_{q_2}P_2$, da cui $M_{q_2} = P_2P_1^{-1}M_{q_1}P_1P_2^{-1}$. In definitiva la matrice del cambiamento di coordinate è $P_1P_2^{-1}$.