**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA**

Risoluzione Compito del 13/06/2001

I

1– Il generico piano per $O$ ha equazione: $ax + by + cz = 0$. I parametri direttori di $l$ sono $(1, 1, 0)$. Perche' il piano sia $\parallel$ ad $l$ dev'essere: $a + b = 0$. Cioe' $b = -a$. Per soddisfare la condizione voluta dal testo la normale al piano deve formare con l'asse $\vec{z}$ un agolo di $\pi/3$. Quindi tenendo conto che il coseno dell'angolo di due rette è dato da

$$\cos \hat{\vec{r}\vec{s}} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{|\,\vec{r}\,||\,\vec{s}\,|}$$

nel nostro caso si ha: $\frac{c}{\sqrt{2a^2+c^2}} = \frac{1}{2}$ da cui segue $\frac{c}{a} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Quindi i piani richiesti hanno equazioni:

$$\boxed{x - y \pm \sqrt{\frac{2}{3}}z = 0.}$$

2–Le quadriche aventi la $C_\infty$ richiesta sono quelle aventi equazione

$$(ax + by + cz + d)t + x^2 + 2y^2 + hz^2 = 0$$

Perche' passino per $O$ il termine noto $d$ dev'essere nullo. Inoltre la retta $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ deve essere tangente; quindi facendo intersezione con la quadrica si devono avere almeno due intersezioni coincidenti; dall'equazione $ax+bx+x^2+2x^2 = 0$ si trae $a+b = 0$ Analogamente dall'equazione $\begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}$ si trae: $(a + 2b + c)x + (9 + h)x^2$ da cui si deduce: $a + b + b + c = 0$.

In definitiva l'equazione delle quadriche cercate è

$$\boxed{(*) \qquad a(x - y + z) + x^2 + 2y^2 + hz^2 = 0}$$

Si può fare uno studio sintetico della famiglia di quadriche trovate.

Se $a = 0$ si hanno due casi. Per $h = 0$ si ha una quadrica spezzata in due piani. Mentre per $h \neq 0$ si hanno coni con vertice nell'origine.

Per $a \neq 0$ le quadriche passano per $O$ e il piano tangente nell'origine è $x = y - z$. Secando la (*) con tale piano si ha la conica

$$\begin{cases} x = y - z \\ y^2 + z^2 - 2yz + 2y^2 + hz^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ 3y^2 - 2yz + (h + 1)z^2 = 0 \end{cases}$$

la quale è sempre spezzata in due rette:

**reali e distinte** se $\Delta = -3h - 2 > 0$ ; cio' per $h < -\frac{2}{3}$. **Punti iperbolici**

**reali e coincidenti** se $\Delta = -3h - 2 = 0$; cio' per $h = -\frac{2}{3}$. **Punti parabolici**

**immaginarie e coniugate** se $\Delta = -3h - 2 < 0$; cio' per $h > -\frac{2}{3}$. **Punti iperbolici**

Per $h \neq 0$ la $C_\infty$ è sempre irriducibile e quindi nel I caso si hanno sempre **iperboloidi iperbolici**.

Nel secondo caso si hanno sempre **coni**.

Nell'ultimo caso si hanno **iperboloidi ellittici**, per $h \neq 0$. Mentre per $h = 0$ si ha un **paraboloide ellittico**.

3–Per trovare gli eventuali casi in cui la nostra quadrica è di rotazione dobbiamo trvare i valori del parametro $h$ per cui la $C_\infty$ risulta bitangente al cerchio assoluto.
Dal sistema

$$\begin{cases} a(x-y+z)t + x^2 + 2y^2 + hz^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

si deduce, per sostituzione

$$\begin{cases} (h-1)z^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Si hanno quindi due soluzioni coincidenti se $h = 1$. In tal caso i punti di contatto sono: $A = (i, 0, 1, 0)$ e $\overline{A} = (-i, 0, 1, 0)$. Per trovare l'asse di rotazione calcoliamo i piani tangenti alla generica quadrica nei due punti $A$ e $\overline{A}$. Si ottiene

$$\begin{cases} -ix + z - i\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 0 \\ ix + z + i\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

Quindi **l'asse di rotazione** è la retta $\begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ z = -\frac{a}{2} \end{cases}$

II

È noto che per definire una applicazione lineare bisogna assegnare le immagini dei vettori di una base. Tenendo conto dei dati si ha:

$$f(1,0,1) = \lambda(1,0,1) \quad f(1,0,0) = (0,0,1) \quad f(1,12) = (a,b,0)$$

Dovendo imporre che l'autovalore $\lambda$ sia almeno doppio, in quanto la dimensione di $V_\lambda$ è due, si deve trovare una matrice associata ad $f$ rispetto alle stesse basi nel dominio e nel codominio. Scegliamo come base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ quella costituita dai vettori: $\mathcal{B} = \{(1,0,1); (1,0,0); (1,1,2)\}$.

Si vede subito che le componenti del generico vettore $(u, v, w)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, $(u, v, w) = x(1,0,1) + y(1,0,0) + z(1,1,2)$, sono date da

$$\begin{cases} x = w - 2v \\ y = u + v - w \\ z = v \end{cases}$$

Ne segue che la matrice associata ad $f$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A = M(f)^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -2b \\ 0 & -1 & a+b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

È immediato vedere che gli autovalori sono: $T = \lambda$; $T = -1$; $T = b$. Intanto per l'iniettività dev'essere $\lambda \neq 0; b \neq 0$.

Ricordiamo poi che $\lambda$ dev'essere almeno doppio. Si devono avere quindi i seguenti casi:

1. $\lambda = b = -1$, se $\lambda$ è triplo.
2. $\lambda = -1$, $b \neq -1$.
3. $\lambda = b$, $b \neq -1$.

La matrice caratteristica è

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} \lambda - T & 1 & -2b \\ 0 & -1-T & a+b \\ 0 & 0 & b-T \end{pmatrix}$$

Allora nel caso 1– la matrice diventa: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Evidentemente $f$ non è semplice e la $\dim V_{-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } a \neq 1 \\ 2 & \text{se } a = 1. \end{cases}$

Nel caso 2– la matrice caratteristica diventa: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2b \\ 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$. Il rango di tale matrice è certamente 2 e quindi in tal caso l'endomorfismo non è semplice.

Nel terzo caso la matrice diventa: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2b \\ 0 & -1-b & a+b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per essere il rango di questa matrice 1, deve accadere che $a + b - 2b - 2b^2 = 0$, cioè $a = b + 2b^2$. Questo è l'unico caso in cui $f$ è semplice. A questo punto è facile fare i calcoli per trovare una base di autovettori come vuole il testo.

III

La matrice caratteristica della forma quadratica, rispetto alla base canonica, è:

$$\begin{pmatrix} h-T & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & k-T & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & (h+1)-T \end{pmatrix}$$

Un facile calcolo mostra che gli autovalori sono: $T = k$; $T = (h+2)$; $T = (h-1)$.
Una forma canonica è: $Q(X, Y, Z) = kX^2 + (h+2)y^2 + (h-1)Z^2$.
$Q(X, Y, Z)$ è **definita positiva** se i tre autovalori sono tutti positivi. Ciò si verifica per $k > 0, h > 1$.È **semidefinita positiva** segli autovalori sono positivi, tranne qualcuno che può essere nullo. E si continua facilmenete tale classificazione.
Per trovare la matrice del cambiamento di coordinate bisogna trovare una base di autovettori e ortonormalizzarla. La matrice del cambiamento di coordinate è quella avente tali autovettori ortonormalizzati come coonne. I dettagli dei calcoli sono lasciati allo studente.