FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**

Soluzione della prova scritta di **Geometria I** assegnata il 23/4/2001

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$. Si considerino le coniche di equazioni $\mathcal{C}_1 \begin{cases} x^2+y^2-2x-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ e $\mathcal{C}_2 \begin{cases} x^2-2x-y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$

1. Si studi il fascio Φ individuato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$; in particolare si trovino i punti base e le coniche spezzate.
2. Sia γ l'iperbole equilatera di Φ, si studi il fascio Ψ di quadriche contenenti γ e aventi come conica all'infinito: $\begin{cases} x^2-y^2-z^2+2yz=0 \\ t=0 \end{cases}$

   Nel fascio c'è un solo cilindro di cui si chiede il vertice.
3. Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di Ψ passante per $(0,0,1)$, si scrivano le equazioni della conica sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $y-z+2=0$ e si dica di che conica si tratta.

Svolgimento

1. Notiamo immediatamente che $\mathcal{C}_1$ è una circonferenza, mentre $\mathcal{C}_2$ una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y. Il fascio richiesto è:

$$\lambda(x^2+y^2-2x-1)+\mu(x^2-2x-y+1)=0$$

per $\lambda=0$ si ottiene $\mathcal{C}_2$, per $\lambda\neq 0$ possiamo porre $k=\dfrac{\mu}{\lambda}$ e il fascio si può scrivere nella forma:

$$(1+k)x^2+y^2-2(1+k)x-ky+k-1=0$$

Consideriamo la matrice B del fascio di coniche:

$$|B|=\begin{vmatrix} 1+k & 0 & -1-k \\ 0 & 1 & -\dfrac{k}{2} \\ -1-k & -\dfrac{k}{2} & k-1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-1)-(-1-k)^2-\frac{k^2}{4}(1+k) = k^2-1-k^2-1-2k-\frac{k^2}{4}(1+k) =$$

$$= -2(k+1)-\frac{k^2}{4}(1+k)=(1+k)\left(-2-\frac{k^2}{4}\right)=\frac{(1+k)(-8-k^2)}{4}$$

Si ha $|B|=0 \Leftrightarrow k=-1$.

Per $k=-1$ si ottiene la conica spezzata:

$$y^2+y-2=0$$

$$(y+2)(y-1)=0$$

per $k\neq -1$ si ottengono coniche irriducibili, si consideri la sottomatrice A

$$|A|=1+k \qquad \Rightarrow \begin{array}{llll} 1+k>0 & \Rightarrow & k>-1 & \text{ellissi} \\ 1+k=0 & \Rightarrow & k=-1 & \text{parabola} \\ 1+k<0 & \Rightarrow & k<-1 & \text{iperboli} \end{array}$$

I punti base sono dati dal sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-1=0 \\ x^2-2x-y+1=0 \end{cases} \begin{cases} x^2-2x=1-y^2 \\ x^2-2x=y-1 \end{cases} \begin{cases} x^2-2x=1-y^2 \\ 1-y^2=y-1 \end{cases} \begin{cases} x^2-2x=1-y^2 \\ y^2+y-2=0 \end{cases}$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}= \begin{array}{l} \nearrow \ \frac{-1-3}{2}=-2 \\ \searrow \ \frac{-1+3}{2}=1 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x^2-2x=0 \begin{array}{l} \nearrow \ x=0 \\ \searrow \ x=2 \end{array} \end{cases} \qquad (0,1) \quad (2,1)$$

$$\begin{cases} y=-2 \\ x^2-2x+3=0 \to x=1\pm i\sqrt{2} \end{cases} \qquad \left(1\pm i\sqrt{2},-2\right) \text{ (punti immaginari).}$$

2. L'iperbole equilatera del fascio si ottiene per $\mathrm{Tr}A=0 \Rightarrow 1+1+k=0$ $k=-2$. Pertanto l'equazione di γ sarà $x^2-y^2-2x-2y+3=0$. La generica quadrica contenent γ è data da:

$$x^2-y^2-2x-2y+3+z(ax+by+cz+d)=0$$

la conica all'infinito sarà

$$\begin{cases} x^2-y^2+axz+byz+cz^2=0 \\ t=0 \end{cases}$$

imponendo che essa coincida con quella data (ovvero che i coefficenti delle equazioni siano proporzionali) si ha:

$$x^2-y^2+axz+byz+cz^2=\rho(x^2-y^2-z^2+2yz) \Rightarrow \begin{cases} \rho=1 \\ a=0 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

Dunque il fascio Ψ ha equazione $x^2-y^2-z^2+2yz-2x-2y+dz+3=0$.

Si consideri la matrice B del fascio di quadriche:

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{d}{2} \\ -1 & -1 & \frac{d}{2} & 3 \end{vmatrix}$$

applicando il teorema di La Place alla prima riga:

$$|B|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \frac{d}{2} \\ -1 & \frac{d}{2} & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{d}{2} \end{vmatrix} =$$

$$=3-\frac{d}{2}-\frac{d}{2}+1+\frac{d^2}{4}-3=-\frac{d}{2}-\frac{d}{2}+1+\frac{d^2}{4}=\frac{d^2-4d+4}{4}=\frac{(d-2)^2}{4}$$

Consideriamo ora la sottomatrice A del fascio

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{(dunque la conica all'infinito è spezzata)}$$

$|B|=0 \Leftrightarrow d=2$ e in tal caso si ottiene un cilindro (le cui sezioni sono iperboli perchè contiene γ), per $d\neq-2$ si ottengono quadriche non degeneri; poichè la conica all'infinito è spezzata, tutte le coniche non degeneri del fascio sono paraboloidi (iperbolici perchè $|B|>0$).

Per $d=2$ si ottiene l'equazione del cilindro $x^2-y^2-z^2+2yz-2x-2y+2z+3=0$, il vertice è il punto doppio della sua conica all'infinito:

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^2+2yz=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-(y-z)^2=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y-z)(x-y+z)=0 \\ t=0 \end{cases}$$

dunque il vertice è dato da:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=z \\ t=0 \end{cases} \qquad V(0,1,1,0)$$

3. Sappiamo che $\Psi : x^2-y^2-z^2+2yz-2x-2y+dz+3=0$, imponemdo il passaggio per $(0,0,1)$:

$$-1+d+3=0 \Rightarrow d=-2$$

dunque $\mathcal{Q}$ ha equazione: $x^2-y^2-z^2+2yz-2x-2y-2z+3=0$

intersecando con il piano $y-z+2=0$ otteniamo

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^2+2yz-2x-2y-2z+3=0 \\ y-z+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-y^2-y^2-4-4y+2y^2+4y-2x-2y-2y-4+3=0 \\ z=y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x-4y-5=0 \\ z=y+2 \end{cases}$$

tale conica interseca il piano improprio in un punto (Y_∞) con molteplicità 2, si tratta pertanto di una parabola.

1. Sia $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

   si studi l'endomorfismo g al variare di k determinando in ciascun caso Ker$f$ e Imf

2. Si verifichi che $P_c(t) = (t^2 - 5t + 6 + k)^2$ e si dica per quali valori di k le radici del polinomio caratteristico appartengono a $\mathbb{R}$. In particolare, per $k = 0$, studiare la semplicità di g.

3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2,2}$ (spazio delle matrici 2×2) e la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & k \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Sia $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ l'endomorfismo definito da: $\forall X \in \mathbb{R}^{2,2}$ $f(X) = BX$, si studi f al variare di k. Verificato che la matrice di f rispetto alla base usuale di $\mathbb{R}^{2,2}$ è A, si deduca da ciò che f non è semplice per $k = 1$.

Svolgimento

1. Si ha:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & k & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & k \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 2 & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 2 & k \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & k \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (6 + k)^2$$

   dunque $\boxed{\text{per } k \neq -6}$ g è un isomorfismo: Ker$g = \{\underline{0}\}$, Im$g = \mathbb{R}^4$.

   $\boxed{\text{Per } k = -6}$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 + \frac{1}{2}R_1 \\ R_4 + \frac{1}{2}R_2}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   dunque rk$A = 2 \Rightarrow$dim Im$g = 2$ e Im$g = \mathcal{L}\left((2, 0, -1, 0), (0, 2, 0, -1)\right)$; troviamo una base di Ker$g$.

$$\text{Sia } v = (x, y, z, t) \in \text{Ker}g \Rightarrow g(v) = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6z = 0 \\ 2y - 6t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = 3t \end{cases} \quad \text{dunque Ker}g = \mathcal{L}\left((3, 0, 1, 0), (0, 3, 0, 1)\right).$$

2. Il polinomio caratteristico di g è

$$P_c(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & k & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & k \\ -1 & 0 & 3-t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 2-t & 0 & k \\ 0 & 3-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 2-t & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3-t \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t)\left[(2-t)(3-t)^2 + k(3-t)\right] + k\left[k + (2-t)(3-t)\right] =$$

$$= (2-t)(3-t)[(2-t)(3-t) + k] + k[(2-t)(3-t) + k] =$$

$= [(2-t)(3-t)+k][(2-t)(3-t)+k] = [(2-t)(3-t)+k]^2 =$
$= (t^2-5t+6+k)^2$

le radici appartengono tutte a $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = 25-4(6+k) \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{1}{4}$

$\boxed{\text{Per } k=0}$ $p_c(t) = (2-t)^2(3-t)^2 \Rightarrow$ gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = 3$ con molteplicità 2.

In $A-tI$ per $k=0$ e $t=2$ si ottiene:

$$A-2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \mathrm{rk}(A-2I) = 2$$

$\dim V_2 = 4 - rk(A-2I) = 2$,

in $A-tI$ per $k=0$ e $t=3$ si ottiene:

$$A-3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \mathrm{rk}(A-3I) = 2$$

$\dim V_3 = 4 - rk(A-2I) = 2 \Rightarrow g$ è semplice.

3. f è un isomorfismo se e soltanto se $|B| \neq 0$, infatti:
   se $|B| \neq 0$ allora B è invertibile (esiste B^{-1}),
   $\forall M \in \mathbb{R}^{2,2} \quad \exists \overline{M} = B^{-1}M$ tale che
   $f(\overline{M}) = f(B^{-1}M) = BB^{-1}M = M$ pertanto f è suriettiva, da cui f è un isomorfismo;
   viceversa se f è un isomorfismo, $\exists C \in \mathbb{R}^{2,2}$ tale che $I = f(C) = BC$ pertanto B è invertibile e quindi $|B| \neq 0$.
   Si ha $|B| = 6-k$, dunque per $k \neq 6$ f è un isomorfismo.
   Per $k=6$ cerchiamo $\mathrm{Im}\, f$ e $\mathrm{Ker} f$,
   sia $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f$ allora $\exists X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tale che $f(X) = Y$

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 2x - 6z \\ b = 2y - 6t \\ c = -x + 3z \\ d = -y + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$$

$$\mathrm{Im} f = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{2,2} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$

Sia $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f$ allora

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 6z = 0 \\ 2y - 6t = 0 \\ -x + 3z = 0 \\ -y + 3t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3z \\ y = 3t \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}f = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 3z & 3t \\ z & t \end{pmatrix} \right\}$$

Sia $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base usuale di $\mathbb{R}^{2,2}$; è facile verificare che:

$$\begin{cases} f(E_1) = 2E_1 - E_3 \\ f(E_2) = 2E_2 - E_4 \\ f(E_3) = kE_1 + 3E_3 \\ f(E_4) = kE_2 + 3E_4 \end{cases}$$

Pertanto la matrice di f rispetto a tale base è A, ne segue che in polinomio caratteristico di f non è semplice per $k > \frac{1}{4}$, dunque in particolare per $k = 1$.