

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**

Soluzione della prova scritta di **Geometria I** assegnata il 28/2/2001

By Dott.ssa Ornella Parisi

I

Sono assegnati, in $\mathbb{R}^4$ i vettori: $v_1 = (1, 0, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 3, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 0, 1)$,
sia $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ e $f : W \rightarrow W$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned}f(v_1) &= v_3 \\f(v_2) &= hv_2 \\f(v_3) &= 2v_1 - v_3\end{aligned}$$

1. Studiare f al variare del parametro reale h determinando in ciascun caso $\text{Ker}f$ e $\text{Im}f$.
2. Provare che f è semplice per ogni valore di h . Diagonalizzare f indicando la matrice diagonalizzante.
3. Per il valore di h per cui f ammette l'autovalore nullo, sia $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'estensione di f tale che $W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \circ w = 0 \quad \forall w \in W\}$ (con $\circ$ prodotto scalare euclideo) è autospazio relativo all'autovalore -1 . Determinare la matrice di Φ specificando rispetto a quale base la si è calcolata.

Svolgimento

1. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M^{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si ha $|M^{\mathcal{B}}(f)| = -2h$ dunque per $h \neq 0$ f è un isomorfismo ($\text{Ker}f = \{\underline{0}\}$, $\text{Im}f = W$),

Per $h = 0$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rk}A = 2$$

quindi $\dim \text{Im}f = 2$ e $\text{Im}f = \mathcal{L}(f(v_1), f(v_2))$ e $\dim \text{Ker}f = 1$, troviamo una base di $\text{Ker}f$.

Sia $v = av_1 + bv_2 + cv_3 \in \text{Ker}f \Rightarrow f(av_1 + bv_2 + cv_3) = \underline{0} \Rightarrow af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) = \underline{0} \Rightarrow$
 $av_3 + c(2v_1 - v_3) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = c = 0$ dunque $v = bv_2$ e $\text{Ker}f = \mathcal{L}(v_2)$

2. Il polinomio caratteristico di f è

$$|A - tI| = \begin{vmatrix} -t & 0 & 2 \\ 0 & h-t & 0 \\ 1 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (h-t) \begin{vmatrix} -t & 2 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} =$$

$= (h-t)(t^2 + t - 2) = (h-t)(t-1)(t+2)$, allora gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = h$.

Per $h \neq 1, -2$ gli autovalori sono tutti distinti pertanto f è semplice.

Una matrice diagonale per f è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$

Per poter indicare la matrice diagonalizzante cerchiamo una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di autovettori.

Un autovettore relativo all'autovalore 1 è $v = av_1 + bv_2 + cv_3 \neq \underline{0}$ tale che $f(v) = v$

$$\begin{aligned} f(av_1 + bv_2 + cv_3) &= av_1 + bv_2 + cv_3 \\ af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) &= av_1 + bv_2 + cv_3 \\ av_3 + bhv_2 + c(2v_1 - v_3) &= av_1 + bv_2 + cv_3 \\ (2c - a)v_1 + (bh - b)v_2 + (a - 2c)v_3 &= \underline{0} \\ \begin{cases} 2c - a = 0 \\ bh - b = 0 \\ a - 2c = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

una base di V_1 è $u_1 = 2v_1 + v_3$;

un autovettore relativo all'autovalore -2 è $v = av_1 + bv_2 + cv_3 \neq \underline{0}$ tale che $f(v) = -2v$

$$\begin{aligned} f(av_1 + bv_2 + cv_3) &= -2av_1 - 2bv_2 - 2cv_3 \\ af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) &= -2av_1 - 2bv_2 - 2cv_3 \\ av_3 + bhv_2 + c(2v_1 - v_3) &= -2av_1 - 2bv_2 - 2cv_3 \\ (2c + 2a)v_1 + (bh + 2b)v_2 + (a + c)v_3 &= \underline{0} \\ \begin{cases} 2c + 2a = 0 \\ bh + 2b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

una base di V_{-2} è $u_2 = v_1 - v_3$;

un autovettore relativo all'autovalore h è $u_3 = v_2$.

La matrice diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Per $h = 1$ gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = -2$ con molteplicità 1. Dunque f è semplice $\Leftrightarrow \dim V_1 = 2$. In $A - tI$ per $h = 1$ e $t = 1$ si ottiene:

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(A - I) = 1$$

$\dim V_1 = 3 - \text{rk}(A - I) = 2 \Rightarrow f$ è semplice.

Una matrice diagonale per f è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Per poter indicare la matrice diagonalizzante cerchiamo una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di autovettori.

Un autovettore relativo all'autovalore 1 è $v = av_1 + bv_2 + cv_3 \neq \underline{0}$ tale che $f(v) = v$

$$\begin{aligned} f(av_1 + bv_2 + cv_3) &= av_1 + bv_2 + cv_3 \\ af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) &= av_1 + bv_2 + cv_3 \\ av_3 + bv_2 + c(2v_1 - v_3) &= av_1 + bv_2 + cv_3 \\ (2c - a)v_1 + (a - 2c)v_3 &= \underline{0} \\ 2c - a = 0 &\Rightarrow a = 2c \end{aligned}$$

una base di V_1 è $u_1 = 2v_1 + v_3$ e $u_2 = v_2$;

un autovettore relativo all'autovalore -2 è $v = av_1 + bv_2 + cv_3 \neq \underline{0}$ tale che $f(v) = -2v$

$$f(av_1 + bv_2 + cv_3) = -2av_1 - 2bv_2 - 2cv_3$$

$$\begin{aligned}
af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) &= -2av_1 - 2bv_2 - 2cv_3 \\
av_3 + bv_2 + c(2v_1 - v_3) &= -2av_1 - 2bv_2 - 2cv_3 \\
(2c + 2a)v_1 - 3bv_2 + (a + c)v_3 &= \underline{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2c + 2a = 0 \\ 3b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \end{cases}$$

una base di V_{-2} è $u_3 = -v_1 + v_3$;

La matrice diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Per $h = -2$ gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 1 e $\lambda_2 = -2$ con molteplicità 2. Dunque f è semplice $\Leftrightarrow \dim V_{-2} = 2$. In $A - tI$ per $h = -2$ e $t = -2$ si ottiene:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(A + 2I) = 1$$

$\dim V_{-2} = 3 - \text{rk}(A + 2I) = 2 \Rightarrow f$ è semplice.

Una matrice diagonale per f è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Per poter indicare la matrice diagonalizzante cerchiamo una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di autovettori.

Un autovettore relativo all'autovalore 1 è $v = av_1 + bv_2 + cv_3 \neq \underline{0}$ tale che $f(v) = v$

$$\begin{aligned}
f(av_1 + bv_2 + cv_3) &= av_1 + bv_2 + cv_3 \\
af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) &= av_1 + bv_2 + cv_3 \\
av_3 - 2bv_2 + c(2v_1 - v_3) &= av_1 + bv_2 + cv_3 \\
(2c - a)v_1 - 3bv_2 + (a - 2c)v_3 &= \underline{0} \\
\begin{cases} 2c - a = 0 \\ 3b = 0 \\ a - 2c = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

una base di V_1 è $u_1 = 2v_1 + v_3$;

un autovettore relativo all'autovalore -2 è $v = av_1 + bv_2 + cv_3 \neq \underline{0}$ tale che $f(v) = -2v$

$$\begin{aligned}
f(av_1 + bv_2 + cv_3) &= -2av_1 - 2bv_2 - 2cv_3 \\
af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) &= -2av_1 - 2bv_2 - 2cv_3 \\
av_3 - 2bv_2 + c(2v_1 - v_3) &= -2av_1 - 2bv_2 - 2cv_3 \\
(2c + 2a)v_1 + (a + c)v_3 &= \underline{0} \\
a + c = 0 &\Rightarrow c = -a
\end{aligned}$$

una base di V_{-2} è $u_2 = v_2$ e $u_3 = v_1 - v_3$;

La matrice diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. L'endomorfismo f ammette l'autovalore nullo per $h = 0$.

Per definire l'endomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ scegliamo come base di $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ con $v_4 \in W^\perp$ $v_4 = (x, y, z, t)$:

$$\begin{cases} v_1 \circ v_4 = 0 \\ v_2 \circ v_4 = 0 \\ v_3 \circ v_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2z \\ y = -3z \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow v_4 = (-2, -3, 1, 0)$$

Poichè Φ è estensione di f si ha:

$$\begin{aligned} \Phi(v_1) &= f(v_1) = v_3 \\ \Phi(v_2) &= f(v_2) = 0 \\ \Phi(v_3) &= f(v_3) = 2v_1 - v_3 \end{aligned}$$

poichè $W^\perp$ è autospazio relativo all'autovalore -1 $\forall v \in W^\perp$ con $v \neq 0$ v è autovettore relativo all'autovalore -1 $\Rightarrow$

$$\Phi(v_4) = -v_4$$

La matrice di Φ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è

$$M^{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O \vec{x} \vec{y} \vec{z} u$.

1. Siano $\mathcal{P}$ la parabola passante per $A(2, 4, 0)$ e avente il vertice nell'origine con tangente l'asse $\vec{y}$ e γ l'iperbole equilatera passante per X_∞ , tangente alla retta $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ nel punto $(1, 1, 0)$ e avente centro nell'origine degli assi.
Studiare il fascio di coniche individuato da $\mathcal{P}$ e γ , in particolare trovare i punti base e le coniche spezzate.
2. Studiare il fascio Φ di quadriche contenenti γ , la retta $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ e tali che il piano polare dell'origine abbia equazione $2z - 1 = 0$.
3. Determinare i due paraboloidi di Φ , di che tipo di paraboloidi si tratta? Verificare che i due paraboloidi trovati si intersecano in γ , nella retta $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ e in un'altra retta della quale si chiedono le equazioni.

Svolgimento

1. Nel piano $z = 0$ la parabola $\mathcal{P}$ è tangente all'asse $\vec{y}$ nel vertice O e alla retta impropria del punto improprio delle rette ortogonali all'asse $\vec{y}$, ovvero X_∞ . Si consideri il fascio di coniche bitangenti alle rette $x = 0$ e $t = 0$ rispettivamente in O e X_∞ :

$$\lambda xt + \mu y^2 = 0$$

si imponga il passaggio per A : $2\lambda + 16\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -8\mu \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -8 \\ \mu = 1 \end{cases}$ dunque $\mathcal{P}: y^2 - 8x = 0$.

L'iperbole γ passa per X_∞ , poichè è equilatera passerà anche per X_∞ , si consideri allora il fascio di coniche tangenti alla retta $x + y - 2 = 0$ in $(1, 1)$ e passanti per X_∞ e Y_∞ :

$$\lambda(x + y - 2)t + \mu(x - t)(y - t) = 0$$

per $\mu = 0$ si ottiene una conica spezzata, si può dunque supporre $\mu \neq 0$ e porre $k = \frac{\lambda}{\mu}$, si ottiene

$$xy + (k - 1)xt + (k - 1)yt + (1 - 2k)t^2 = 0$$

imponiamo che il centro sia $O(0, 0)$ (si ricordi che il centro è il punto che ha per polare la retta impropria)

$$(0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{k-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{k-1}{2} \\ \frac{k-1}{2} & \frac{k-1}{2} & 1-2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \rho t$$

$$\frac{k-1}{2}x + \frac{k-1}{2}y + (1-2k)t = \rho t \Rightarrow k = 1$$

dunque $\gamma: xy - 1 = 0$.

Il fascio di coniche individuato da $\mathcal{P}$ e γ è

$$\lambda(y^2 - 8x) + \mu(xy - 1) = 0$$

se $\lambda = 0$ si ottiene l'iperbole equilatera γ , per $\lambda \neq 0$ si può porre $k = \frac{\mu}{\lambda}$ ed il fascio si può scrivere nella forma:

$$y^2 + kxy - 8x - k = 0$$

si consideri la matrice B del fascio di coniche:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{2} & -4 \\ \frac{k}{2} & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -k \end{vmatrix} = -16 + \frac{k^3}{4} = \frac{-64 + k^3}{4}$$

per $k = 4$ si ottiene una conica spezzata:

$$y^2 + 4xy - 8x - 4 = 0$$

$$(y - 2)(y + 2) + 4x(y - 2) = 0$$

$$(y - 2)(4x + y + 2) = 0$$

per $k \neq 4$ si ottengono coniche irriducibili, si consideri la sottomatrice A

$$|A| = -\frac{k^2}{4} < 0 \quad \forall k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} k \neq 0 & \text{iperboli} \\ k = 0 & \text{parabola } (\mathcal{P}) \end{array}$$

I punti base propri sono dati dal sistema

$$\begin{cases} y^2 - 8x = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{8}y^2 \\ \frac{1}{8}y^3 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{8}y^2 \\ y^3 - 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{8}y^2 \\ (y - 2)(y^2 + 2y + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{4} \\ y = -1 \pm i\sqrt{3} \end{cases}$$

Si sono ottenuti 3 punti propri, l'ulteriore punto base sarà improprio:

$$\begin{cases} y^2 - 8xt = 0 \\ xy - t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

I punti base sono: $X_\infty, \left(\frac{1}{2}, 2, 0\right), \left(\frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{4}, -1 \pm i\sqrt{3}, 0\right)$

2. Le quadriche contenenti γ sono date da:

$$xy - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0$$

poichè devono contenere la retta $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, sostituendo all'equazione della quadrica $x = 1$ e $y = 1$ si deve ottenere un'identità:

$$(a + b + d)z + cz^2 = 0 \quad \begin{cases} a + b + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = -a - b \\ c = 0 \end{cases}$$

l'equazione diventa: $xy - 1 + axz + byz - (a+b)z = 0$, si imponga infine che il piano polare dell'origine abbia equazione $2z - 1 = 0$:

$$(0, 0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 0 & -\frac{a+b}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{a+b}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \rho(2z - 1)$$

$$-\frac{a+b}{2}z - 1 = \rho(2z - 1) \Rightarrow a = -b - 4$$

Il fascio richiesto è $xy - (b+4)xz + byz + 4z - 1 = 0$, il rango della matrice B è dato da:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{b+4}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ -\frac{b+4}{2} & \frac{b}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - bR_1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{b+4}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ -\frac{b+4}{2} & 0 & \frac{b^2+4b}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + (b+4)R_2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{b+4}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & b^2+4b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 + \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{b+4}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & b^2+4b & 2 \\ 0 & 0 & \frac{b^2+4b+4}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \text{rk}B = 3 & \Leftrightarrow & b = -2 \\ \text{rk}B = 4 & \Leftrightarrow & b \neq -2 \end{matrix}$$

Il determinante della sottomatrice A è:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{b+4}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} \\ -\frac{b+4}{2} & \frac{b}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{b(b+4)}{4}$$

$$\Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ o } b = -4$$

Dunque per $b = 2$ si ottiene un cono, per $b = 0$ e -4 si ottengono paraboloidi, per $b \neq 2, 0, -4$ si ottengono iperboloidi; si noti che le quadriche non degeneri del fascio sono tutte a punti iperbolici (perchè contengono rette) pertanto si tratta di paraboloidi e iperboloidi iperbolici (si poteva anche notare che per $b \neq -2$ $|B| = \frac{(b+2)^2}{4} > 0$).

3. Si è già visto che i due paraboloidi del fascio si ottengono per $b = 0$ e per $b = -4$ dunque avranno equazione:

$$xy - 4xz + 4z - 1 = 0 \quad xy - 4yz + 4z - 1 = 0$$

Si è già detto che si tratta di paraboloidi iperbolici, l'intersezione si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} xy - 4xz + 4z - 1 = 0 \\ xy - 4yz + 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

sottraendo si ottiene

$$\begin{cases} 4z(x - y) = 0 \\ xy - 4yz + 4z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma \begin{cases} z = 0 \\ xy - 1 = 0 \\ x = y \\ y^2 - 4yz + 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

dal secondo sistema si ottiene

$$\begin{cases} x = y \\ (y - 1)(y + 1) - 4z(y - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ (y - 1)(y - 4z + 1) = 0 \end{cases}$$

tale sistema si può decomporre nei due sistemi

$$\begin{cases} x = y \\ y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema equivale a $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ mentre il secondo è l'ulteriore retta della quale si richiedevano le equazioni.