FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**

Soluzione della prova scritta di **Geometria I** assegnata il 7/2/2001

I

1. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione
$$(1+k)x^2 + y^2 - 2x - (k+2)y + k + 1 = 0$$
in particolare trovare i punti base reali e le coniche spezzate.

2. Delle due parabole del fascio sia $\mathcal{P}$ quella che non passa per l'origine; trovare il cono $\mathcal{C}$ di vertice $V(0,0,1)$ e direttrice $\mathcal{P}$.

3. Studiare il fascio di quadriche Ψ contenenti la parabola $\mathcal{P}$ e aventi conica all'infinito coincidente a quella del cono $\mathcal{C}$.

Svolgimento

1. Si consideri la matrice B del fascio di coniche:
$$|B| = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{k+2}{2} \\ -1 & -\dfrac{k+2}{2} & k+1 \end{vmatrix} = (k+1)^2 - 1 - (1+k)\left(\frac{k+2}{2}\right)^2 = \frac{-k^3 - k^2 - 4}{4} =$$
$$= \frac{(k+2)(-k^2+k-2)}{4}$$
Si ha $|B| = 0 \Leftrightarrow k = -2$.

Per $k = -2$ si ottiene la conica spezzata:
$$-x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$$
$$y^2 - (x+1)^2 = 0$$
$$(y+x+1)(y-x-1) = 0$$
per $k \neq -2$ si ottengono coniche irriducibili, si consideri la sottomatrice A
$$|A| = 1 + k \qquad \Rightarrow \begin{array}{lclll} 1+k > 0 & \Rightarrow & k > -1 & \text{ellissi} \\ 1+k = 0 & \Rightarrow & k = -1 & \text{parabola} \\ 1+k < 0 & \Rightarrow & k < -1 & \text{iperboli} \end{array}$$
I punti base sono dati dal sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + (x^2+1)^2 - 2x - 2(x^2+1) + 1 = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + x^4 + 2x^2 + 1 - 2x - 2x^2 - 2 + 1 = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4 + x^2 - 2x = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 + x - 2 = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x + 2 = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \quad \text{(punti immaginari)}$$
i punti base reali sono dunque $(0,1)$, $(1,2)$.

2. Le parabole del fascio sono $x^2 - y + 1 = 0$ (conica individuante il fascio) e $y^2 - 2x - y = 0$ ($k = -1$). Poichè $\mathcal{P}$ non passa per l'origine la sua equazione è $x^2 - y + 1 = 0$. Per trovare l'equazione del cono $\mathcal{C}$ si considerino le quadriche contenenti $\mathcal{P}$, esse sono date da:

$$x^2 - y + 1 + z(ax + by + cz + d) = 0$$

imponiamo la condizione di vertice per il punto $V(0, 0, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ c + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{d}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = -2 \end{cases}$$

Il cono $\mathcal{C}$ ha dunque equazione $x^2 + z^2 + yz - y - 2z + 1 = 0$

3. Per ricavare l'equazione del fascio Ψ, si consideri nuovamente la totalità delle quadriche contenenti $\mathcal{P}$:

$$x^2 - y + 1 + z(ax + by + cz + d) = 0$$

la conica all'infinito sarà

$$\begin{cases} x^2 + axz + byz + cz^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

imponendo che essa coincida con quella del cono $\mathcal{C}$ (ovvero che i coefficenti delle equazioni siano proporzionali) si ha:

$$x^2 + axz + byz + cz^2 = \rho(x^2 + z^2 + yz) \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ a = 0 \\ b = c = 1 \end{cases}$$

Dunque il fascio Ψ ha equazione $x^2 + z^2 + yz - y + dz + 1 = 0$. Si consideri la matrice B del fascio di quadriche:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{d}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{d}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{d}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{d}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-d-2}{4}$$

Per $d = -2$ si ottiene il cono $\mathcal{C}$, per $d \neq -2$ si ottengono quadriche non degeneri; poichè sappiamo che la conica all'infinito coincide con quella del cono, essa è irriducibile e a punti reali, pertanto tutte le coniche non degeneri del fascio sono iperboloidi. Dunque

$$\begin{array}{lllll}
|B| > 0 & \Rightarrow & -d-2 > 0 & \Rightarrow & d < -2 \quad \text{iperboloidi iperbolici} \\
|B| < 0 & \Rightarrow & -d-2 < 0 & \Rightarrow & d > -2 \quad \text{iperboloidi ellittici.} \\
|B| = 0 & \Rightarrow & -d-2 = 0 & \Rightarrow & d = -2 \quad \text{cono}
\end{array}$$

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2+k & 6-k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

1. Studiare f al variare del parametro reale k determinando in ciascun caso una base di $\mathrm{Ker} f$ e una di $\mathrm{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di f, al variare di k.

   Nell'unico caso in cui f è semplice e possiede autovalori multipli diagonalizzare la matrice indicando la matrice diagonalizzante.
3. Per $k = 1$ trovare $\mathrm{Im} f^{\perp} = \{v \in \mathbb{R} | \quad v \circ w = 0 \quad \forall w \in \mathrm{Im} f\}$ con $\circ$ prodotto scalare euclideo.

Svolgimento

1. Si ha:

$$|M(f)| = 2 \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 2(1-k^2) = 2(1+k)(1-k)$$

dunque $\boxed{\text{per } k \neq \pm 1}$ f è un isomorfismo: $\mathrm{Ker} f = \mathcal{L}(\underline{0})$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$.

$\boxed{\text{Per } k = -1}$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rk}\, M(f) = 2 \text{ (le ultime due righe sono proporzionali)}$$

quindi

$\dim \mathrm{Im} f = 2$ e $\mathrm{Im} f = \mathcal{L}((2,0,0),(1,1,-1))$ (basta prendere due colonne l. i.)

e $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im} f = 3 - 2 = 1$, troviamo una base di $\mathrm{Ker} f$.

Sia $v = (x,y,z) \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(v) = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 7z = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -4z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow v = (-4z, z, z)$ dunque $\mathrm{Ker} f = \mathcal{L}(-4,1,1)$.

$\boxed{\text{Per } k = 1}$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rk}\, M(f) = 2$$

quindi $\dim \mathrm{Im} f = 2$ e $\mathrm{Im} f = \mathcal{L}((2,0,0),(3,1,1))$ e $\dim \mathrm{Ker} f = 1$, troviamo una base di $\mathrm{Ker} f$.

Sia $v = (x,y,z) \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(v) = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow v = (-z, -z, z)$ dunque $\mathrm{Ker} f = \mathcal{L}(-1,-1,1)$

2. Il polinomio caratteristico di f è

$$P_c(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 2+k & 6-k \\ 0 & 1-t & k \\ 0 & k & 1-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & k \\ k & 1-t \end{vmatrix} =$$

$= (2-t)\left[(1-t)^2 - k^2\right] = (2-t)(1-t+k)(1-t-k)$, allora gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1+k$ e $\lambda_3 = 1-k$.

Gli autovalori sono tutti distinti $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1+k \neq 2 \\ 1-k \neq 2 \\ 1+k \neq 1-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -1 \\ k \neq 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Per } k \neq 0, \pm 1}$ gli autovalori sono tutti distinti pertanto f è semplice.

$\boxed{\text{Per } k = 0}$ la matrice $M(f)$ diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità 1 e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità 2.

Dunque f è semplice $\Leftrightarrow \dim V_1 = 2$. Cerchiamo una base per V_1.

Sia $v = (x, y, z) \in V_1 \Rightarrow f(v) = v \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 6z = x \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow x = -2y - 6z$$

dunque $V_1 = \mathcal{L}\left((-2, 1, 0), (-6, 0, 1)\right) \Rightarrow \dim V_1 = 2$, cioè f è semplice (e possiede l'autovalore 1 con molteplicità 2).

$\boxed{\text{Per } k = -1}$ la matrice $M(f)$ diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità 1.

Dunque f è semplice $\Leftrightarrow \dim V_2 = 2$. Cerchiamo una base per V_2.

Sia $v = (x, y, z) \in V_2 \Rightarrow f(v) = 2v \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 7z = 2x \\ y - z = 2y \\ -y + z = 2z \end{cases} \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow v = (x, 0, 0)$$

dunque $V_2 = \mathcal{L}(1, 0, 0) \Rightarrow \dim V_2 = 1$ cioè f non è semplice.

$\boxed{\text{Per } k = 1}$ la matrice $M(f)$ diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità 1.

Dunque f è semplice $\Leftrightarrow \dim V_2 = 2$. Cerchiamo una base per V_2.

Sia $v = (x, y, z) \in V_2 \Rightarrow f(v) = 2v \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2x \\ y + z = 2y \\ y + z = 2z \end{cases} \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow v = (x, 0, 0)$$

dunque $V_2 = \mathcal{L}(1, 0, 0) \Rightarrow \dim V_2 = 1$ cioè f non è semplice.

L'unico caso in cui f è semplice e possiede autovalori multipli si ha per $k = 0$, in tal caso la matrice diagonale è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per poter indicare la matrice diagonalizzante cerchiamo una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di autovettori. Poichè conosciamo già una base di V_1 è sufficiente trovare una base di V_2.

Un autovettore relativo all'autovalore 2 è

$v = (x, y, z) \neq \underline{0}$ tale che $f(v) = 2v \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 6z = 2x \\ y = 2y \\ z = 2z \end{cases} \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow v = (x, 0, 0)$

dunque $V_2 = \mathcal{L}(, 1, 0, 0) \Rightarrow$ una base di autovettori è $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (-2, 1, 0), (-6, 0, 1)\}$ e

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Per $k = 1$ sappiamo già che

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\mathrm{Im} f = \mathcal{L}\left((2, 0, 0), (3, 1, 1)\right)$.

Sia $v = (x, y, z) \in \mathrm{Im} f^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} (x, y, z) \circ (2, 0, 0) = 0 \\ (x, y, z) \circ (3, 1, 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow v = (0, -z, z)$

$$\mathrm{Im} f^{\perp} = \mathcal{L}(0, 1, -1)$$