FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 28/06/2002

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Si possono consultare solo i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$(1+k)x^2 + y^2 + kxy + kx - 1 = 0$$

con k parametro reale. In particolare, trovare:

i) i punti base;

ii) le coniche spezzate.

2) Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza del fascio. Determinare e studiare il fascio di quadriche $\mathcal{Q}$ contenente $\mathcal{C}$, che passa per $Z_\infty = (0,0,1,0)$ e contiene la retta di equazioni $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

II

In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,2,1,1)$ e $v_3 = (1,-1,0,0)$.
Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h, 0, h, 0) \\ f(v_2) &= (0, h+1, h, 1) \\ f(v_3) &= (1, h, 1, h) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Dire per quali valori di h l'endomorfismo f è semplice.
3. Sia $h = \frac{2}{3}$. Dire se f è semplice ed, in tal caso, trovare la matrice diagonalizzante P.

Soluzione

I

Sia

$$\phi : (1+k)x^2 + y^2 + kxy + kx - 1 = 0.$$

Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} 1+k & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 1 & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} = -k - 1$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow k = -1$. In tal caso si hanno coniche spezzate. Se $k = -1 \Rightarrow rkB = 2$ e ϕ si spezza nelle due rette $(y+1)(y-x-1) = 0$.

2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -1$ e si hanno coniche irriducibili.

Si ha:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+k & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(k^2 - 4k - 4)$$

Pertanto: $|A| = 0 \Leftrightarrow k = 2 \pm 2\sqrt{2}$ e si hanno due parabole. $|A| > 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{2} < k < 2 + 2\sqrt{2}$ e si hanno ellissi.
$|A| < 0 \Leftrightarrow k < 2 - 2\sqrt{2}$ e $k > 2 + 2\sqrt{2}$ e si hanno iperboli.
i) I punti base del fascio si trovano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x(x+y-1) = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $A = (0,1)$, $B = (-1,0)$ e $C = (0-1)$ contato due volte. La circonferenza del fascio è $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 1 = 0$. Quindi da

$$\Psi : \quad z(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

imponendo il passaggio per $Z_\infty = (0,0,1,0)$ si ha $c = 0$. Imponendo che Ψ contiene la retta $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$, si ha $b = a - 2$ e $d = 2 - a$. Pertanto il fascio di quadriche è il seguente

$$\Psi : \; x^2 + y^2 + axz + (a-2)yz + (2-a)z - 1 = 0$$

Quindi

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a-2}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{a-2}{2} & 0 & \frac{2-a}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2-a}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}$$

e

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a-2}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a-2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(a^2 - 2a + 2) < 0 \text{ per ogni } a \in \mathbb{R},$$

Quindi:
$|B| = 0 \Leftrightarrow a = 0$. In questo caso $rk(B) = 3$ ed essendo $|A| = -1$, la quadrica è il cono:

$$\Psi : \ x^2 + y^2 - 2yz + 2z - 1 = 0\,.$$

$|B| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$. In tal caso, si hanno quadriche non degeneri; in particolare, essendo $|A| \neq 0$, non si hanno paraboloidi, ma solo iperboloidi e/o ellissoidi. A tale scopo, studiamo il segno degli autovalori relativi al polinomio caratteristico associato alla sottomatrice A. Quindi:

$$|A - IT| = \begin{vmatrix} \text{1-T} & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & \text{1-T} & \frac{a-2}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a-2}{2} & \text{-T} \end{vmatrix} =$$

$$= -T^3 + 2T^2 + \frac{a^2 - 2a}{2}T - \frac{a^2 - 2a + 2}{2}$$

e dalla regola di Cartesio si trova che si sono solo iperboloidi.

II

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ una base di V. Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h} & \text{h-1} & \text{1-h} \\ 0 & 1 & \text{h} \\ 0 & \text{1-h} & \text{h} \end{vmatrix} = h^3$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0$ ed in tal caso f è un isomorfismo.
Sia $h = 0$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è $\{(-1,1,1),(1,0,0)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbf{R} \mid y = 0, z = 0\}$, pertanto una base è $\{(1,0,0)\} = v_1$.
Calcoliamo adesso

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} \text{h-T} & \text{h-1} & \text{1-h} \\ 0 & \text{1-T} & \text{h} \\ 0 & \text{1-h} & \text{h-T} \end{vmatrix} = (h-T)(T^2 - (h+1)T + h^2)$$

Per studiare la semplicit di f bisogna studiare il segno di $\Delta_1 = -3h^2+2h+1$.
Si ha:

1. $$\Delta_1 < 0 \Leftrightarrow h < -\frac{1}{3} \quad \vee \quad h > 1$$
   ed in tal caso non si hanno autovalori reali.

2. $$\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow h = -\frac{1}{3}, 1$$
   ed, in tali casi, si hanno rispettivamente i seguenti autovalori:
   $$T_1 = -\frac{1}{3} \text{ semplice e } T_2 = \frac{1}{3} \text{ doppio}$$
   e
   $$T_1 = 1 \text{ triplo}$$

3. $$\Delta_1 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < h < 1$$
   In tal caso si hanno tre autovalori distinti se e solo se
   $$\frac{h+1+\sqrt{-3h^2+2h+1}}{2} \neq h$$

e

$$\frac{h+1-\sqrt{-3h^2+2h+1}}{2} \neq h$$

ovvero, se e solo se $h \neq 0, 1$

Per $h = 0$ si ha $T_1 = 0$ semplice e $T_2 = 1$ doppio.

Si verifica facilmente che f non è semplice per $h = -\frac{1}{3}, 0, 1$. Si conclude pertanto che f è semplice se $-\frac{1}{3} < h < 1$ ed $h \neq 0$.
Sia adesso $h = \frac{2}{3}$. Si hanno i seguenti autovalori:

$$T_1 = \frac{2}{3}, \quad T_2 = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad T_3 = \frac{1}{3}$$

Si ha:

$$V_{\frac{2}{3}} = \{(x, y, z) \in V \mid y = 0, z = 0\} = \{(x, 0, 0)\}$$

ed una base è data dal vettore $(1, 0, 0)_{\mathcal{B}} = v_1$.

$$V_{\frac{4}{3}} = \{(x, y, z) \in V \mid y = -4x, z = -2x\} = \{(x, -4x, -2x)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $(1, -4, -2)_{\mathcal{B}}$.

$$V_{\frac{1}{3}} = \{(x, y, z) \in V \mid x = -2z, y = -z\} = \{(-2z, -z, z)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $(2, 1, -1)_{\mathcal{B}}$.
Quindi la matrice diagonalizzante P è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$