FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Classe Ingegneria Industriale-(A-F)

Prova scritta di esonero I di **Algebra Lineare** assegnata il 9/11/02

I

1. Data la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, trovare due matrici S e A, l'una simmetrica e l'altra antisimmetrica, tali che $M = S + A$. (punti: 3).

   Risoluzione

   Si devono determinare due matrici incognite $S = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ tali che

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y+t \\ y-t & z \end{pmatrix}$$

   Basta quindi risolvere il sistema
   $$\begin{cases} x = a \\ z = d \\ y + t = b \\ y - t = c \end{cases}$$

   Segue che $S = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}$; $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix}$

2. Nello spazio $\mathbb{R}_2[X]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e a coefficienti in $\mathbb{R}$, estrarre una base dai generatori: $1 + X^2, X^2 - X, -X^2 + 3X + 2, 3X + 3, X$. (punti: 2)

   Risoluzione

   I primi due polinomi sono evidentemente indipendenti. Usando il metodo degli scarti successivi vediamo se $-X^2 + 3X + 2 = a(1 + X^2) + b(X^2 - X)$. Ne viene il sistema $\begin{cases} a + b = -1 \\ b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$. Quindi il polinomio $-X^2 + 3X + 2$ viene scartato. Anche il polinomio $3X + 3$ è combinazione lineare dei precedenti. Mentre X è indipendente da i primi due polinomi. In definitiva una base è data dai polinomi:

   $$1 + X^2, X^2 - X, X$$

II

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 1+h & 0 & -(1+h) \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$$

1. Studiare l'applicazione f, al variare di h, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$. (punti: 4)

2. Determinare, al variare di h, i vettori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(x, y, z) = (h + 2, -h, h^2 + h + 1)$. (punti: 5)

3. Stabilire per quali valori di h, l'endomorfismo f ammette l'autovalore $T = -1$. (punti:3)

4. Stabilire se per $h = 0$ l'endomorfismo è semplice o meno. Trovare in ogni caso gli autovettori. (punti: 3)

Risoluzione

1. Riducendo per righe la matrice data si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 1+h & 0 & -1-h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 1+h & 0 & -1-h \\ 0 & 0 & 1-h^2 \end{pmatrix}$$

Se $h = -1$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ed allora $dim(Im(f)) = 1$. Una base dell'immagine è data da una colonna non nulla della matrice data $M(f)$. Il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo $A\underline{X} = \underline{0}$. Nel nostro caso si ha $y - z = 0$. Il generico elemento del $Ker(f)$ è (x, z, z). Quindi i vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 1)$ si possono prendere come base del nucleo.

Se invece $h \neq -1$, si possono presentare due casi.

a) $h = 1$. La matrice diventa $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il rango della matrice è due. Quindi la dimensione dell'immagine è due. Una base dell'immagine può essere costituita dalle prime due colonne della matrice data A per $h = 1$. Per esempio $Im(f) = \mathcal{L}((0, 2, 0); (1, 0, 1))$. Il nucleo ha dimensione uno e si può calcolare dal sistema $\begin{cases} y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$. Una base del nucleo è $(1, -1, 1)$.

b) Se $h \neq 1$ la matrice A ha rango tre. In tal caso la nostra applicazione è un **isomorfismo**.

2. Si deve discutere, al variare di h, il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 1+h & 0 & -1-h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+2 \\ -h \\ h^2+h+1 \end{pmatrix}$$

Come al solito si riduce la matrice completa del sistema $\begin{pmatrix} 0 & 1 & h & | & h+2 \\ 1+h & 0 & -1-h & | & -h \\ 0 & h & 1 & | & h^2+h+1 \end{pmatrix}$.

Moltiplicando la prima riga per h e sottraendo dalla terza si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & h & | & h+2 \\ 1+h & 0 & -1-h & | & -h \\ 0 & 0 & 1-h^2 & | & 1-h \end{pmatrix}$$

Distinguiamo vari casi:

Se $h = -1$, la matrice completa del sistema diventa: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$.

Allora in tal caso il sistema è impossibile.

Se $h \neq -1$, ci sono due possibilità, $h = 1$ oppure $h \neq 1$.

Nel primo caso la matrice del sistema diventa $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 0 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$, e il sistema ammette ∞^1 soluzioni che si trovano dal sistema $\begin{cases} y+z=3 \\ x-z=-1 \end{cases}$. La generica soluzione è data da $(\frac{2z-1}{2}3-z, z)$.

Nel secondo caso il sistema ammette una e una sola soluzione.

Facendo i calcoli si trova

$$x = \frac{1-h}{1+h}; \quad y = \frac{h^2+2h+2}{1+h}; \quad z = \frac{1}{1+h}.$$

3. Perchè l'endomorfismo abbia l'autovalore $T=-1$, deve essere nullo il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 1+h & 1 & -1-h \\ 0 & h & 2 \end{pmatrix}$, ottenuta ponendo -1 al posto di T nella matrice caratteristica $\begin{pmatrix} -T & 1 & h \\ 1+h & -T & -1-h \\ 0 & h & 1-T \end{pmatrix}$. Sviluppando i calcoli si trova la risolvente $h(h^2+2h-1)=0$. In sostanza perchè l'endomorfismo abbia l'autovalore -1 dev'essere $h=0$; oppure $h=1\pm\sqrt{2}$.

4. Consideriamo la matrice caratteristica per $h=0$, come dice il testo. Il polinomio caratteristico è dato da $\begin{vmatrix} -T & 1 & 0 \\ 1 & -T & -1 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = 0$. Si trova $(1-T)^2(1+T)=0$. Ed allora l'autovalore $T=1$ ha molteplicità due, ma la dimensione dell'autospazio V_1 è uno. Infatti la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango due. Quindi $dimV_1 = 3-2 = 1 < 2$. L'endomorfismo non è semplice. Un autovettore associato a $T=1$ è $(1,1,0)$. Un autovettore associato a $T=-1$ si trova dal sistema $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$.