

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Area Didattica Informatica-(C)

Prova scritta di **esonero** di **Algebra lineare** assegnata il

I

Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x, y, z) = (hx + y + z, x + hy + z, x + y + hz)$$

1. Studiare f al variare di h e trovare in ogni caso una base di $\text{Ker}(f)$ e una di $\text{Im}(f)$.
punti: 4

2. Determinare al variare di h la totalità dei vettori $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ tali che

$$f(x, y, z) = (1, h + 1, h + 2). \quad \text{punti: 4}$$

3. Studiare la semplicità di f , al variare di h , sapendo che $(1, 1, 1)$ è un autovettore di f .
Quando è possibile, determinare una base di autovettori.
punti: 4

4. Per $h = 0$ trovare il sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(V) \subseteq W = \{(y_1, y_2, y_3) | y_1 - y_2 + y_3 = 0\} \quad \text{punti: 3}$$

Risoluzione

1. La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$. Sottraendo alla

seconda riga la prima moltiplicata per h e alla terza la prima si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 - h^2 & 0 & 1 - h \\ 1 - h & 0 & h - 1 \end{pmatrix}$. Supponiamo che sia $h = 1$; la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

la quale è di rango 1. Quindi la dimensione dell'immagine è 1 e una base dell'immagine è data dalla prima colonna della matrice data per $h = 1$, cioè da $(1, 1, 1)$. Il nucleo si trova dal sistema omogeneo costruito sulla matrice ridotta. Cioè $x + y + z = 0$; da ciò si ricava che $z = -x - y$. Il generico elemento del nucleo è $(x, y, -x - y)$. Una base del nucleo è $(1, 0, -1)$

e $(0, 1, -1)$. Adesso si riprende la matrice $\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 - h^2 & 0 & 1 - h \\ 1 - h & 0 & h - 1 \end{pmatrix}$ e si può supporre $h \neq 1$.

Addizionando alla terza la seconda si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 - h^2 & 0 & 1 - h \\ -h^2 - h + 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Os-

serviamo che $h^2 + h - 2 = 0$ per $h = 1$ e per $h = -2$. Si ha allora per $h = -2$ la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La dimensione dell'immagine è due. Una base dell'immagine è data da $(-2, 1, 1)$ e $(1, -2, 1)$ che sono le prime due colonne della matrice data per $h = -2$. Il nucleo si trova dal sistema lineare omogeneo costruito sulla matrice ridotta; si ottiene $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$. Una base del nucleo è $(1, 1, 1)$.

2. Posto $M(f) = A$, basta discutere, al variare di h , il sistema $A\underline{X} = B$. Come al solito si riduce la matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & h+1 \\ 1 & 1 & h & h+2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1-h^2 & 0 & 1-h & 1 \\ 1-h & 0 & h-1 & h+1 \end{array} \right)$$

Per $h = 1$ la matrice diventa $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$. Chiaramente il sistema è impossibile.

Per $h \neq 1$ si riprende la riduzione della matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1-h^2 & 0 & 1-h & 1 \\ 1-h & 0 & h-1 & h+1 \end{array} \right).$$

Addizionando alla terza la seconda si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1-h^2 & 0 & 1-h & 1 \\ -h^2-h+2 & 0 & 0 & h+2 \end{array} \right)$$

Per $h = -2$ si ha $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. In tal caso il sistema è possibile, e si hanno ∞^1

soluzioni. Un semplice calcolo mostra che la generica soluzione è data da $(\frac{3z-1}{3}, \frac{3z+1}{3}, z)$. Invece per $\neq -2$ il sistema ammette una e una sola soluzione. Un semplice calcolo mostra che la soluzione in tal caso è $(\frac{1}{1-h}, 1, \frac{-h}{1-h})$.

3. La matrice $M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$ è associata ad f rispetto alla base canonica in entrambi gli spazi, dominio e codominio. Per trovare il polinomio caratteristico si deve calcolare

$$\begin{vmatrix} h-T & 1 & 1 \\ 1 & h-T & 1 \\ 1 & 1 & h-T \end{vmatrix} = 0$$

D'altro canto, sapendo che $(1, 1, 1)$ è un autovettore è facile trovare l'autovalore associato. Deve essere $f(1, 1, 1) = T(1, 1, 1)$. Quindi

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+2 \\ h+2 \\ h+2 \end{pmatrix} = (h+2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si deduce che un autovalore è $T = h + 2$. Il polinomio caratteristico è $(h - T)^3 + 2 - 3(h - T) = 0$. Applicando la regola di Ruffini si divide il polinomio caratteristico per $T - (h + 2)$. Si ottiene il quoziente: $T^2 - 2(h - 1)T + (h - 1)^2$. Tale equazione ammette la soluzione $T = h - 1$ con molteplicità due.

Oppure, si prenda il polinomio caratteristico $(h - T)^3 + 2 - 3(h - T) = 0$. Ponendo $h - T = v$ si ha $v^3 + 2 - 3v = 0$. Questa si annulla per $v = 1$. Si abbassa di grado con Ruffini e si ottiene $v^2 + v - 2 = 0$, la quale ammette le soluzioni $v = -2; v = 1$. Sostituendo $v = h - T = 1$ e $v = h - T = -2$. Si ottengono gli autovalori $T = h + 2$ e $T = h - 1$, quest'ultimo con molteplicità due. Sostituendo nella matrice caratteristica $\begin{pmatrix} h-T & 1 & 1 \\ 1 & h-T & 1 \\ 1 & 1 & h-T \end{pmatrix}$, al posto di T il valore $T = h - 1$ si ha la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la quale ha rango uno e quindi la dimensione dell'autospazio V_{h-1} è $\dim V_{h-1} = 3 - r(A - (h-1)I) = 3 - 1 = 2$. L'endomorfismo è semplice. Gli autovettori associati all'autovalore $T = h - 1$ si trovano dal sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. Si ha $z = -x - y$. La generica soluzione è $(x, y, -x - y)$. Autovettori associati a $T = h - 1$ sono $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$. L'autovettore associato a $T = h + 2$ è $(1, 1, 1)$.

Notare che gli autovettori non dipendono da h .

4. Poniamo $h = 0$. Calcoliamo $f(x, y, z)$. Si ottiene: $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$. Se vogliamo che sia $y_1 - y_2 + y_3 = 0$ dobbiamo porre: $y + z - x - z + x + y = 0$. Si trova $y = 0$. Il sottospazio V ha equazione $y = 0$.

II

Stabilire in quali casi le matrici $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$, sono simili. Quando lo sono trovare una matrice P tale che $B = P^{-1}AP$.

punti: 5

Risoluzione Il problema è equivalente a trovare una matrice invertibile P tale che sia $PB = AP$, ottenuta moltiplicando la precedente a sinistra per P . Detta $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ si deve avere

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Moltiplicando le matrici si ha

$$\begin{pmatrix} ax & bx + dy \\ az & bz + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ dz & dt \end{pmatrix}$$

Ciò porta a risolvere il sistema $\begin{cases} ax = ax \\ bx + dy = ay \\ az = dz \\ bz + dt = dt \end{cases}$. Si deduce che $z = 0$ e che $x = \frac{a-d}{b}y$.

Evidentemente deve essere $a - d \neq 0$, perchè altrimenti la matrice P non potrebbe essere invertibile. Il risultato dipende dalle variabili libere y e t non nulle.

Si può rispondere anche con la seguente considerazione. Le due matrici A e B hanno gli stessi autovalori $T = a$ e $T = d$. Ciò non significa però che le due matrici siano simili. Per esempio una potrebbe essere diagonalizzabile e l'altra no. Ora vediamo sotto quali condizioni B è diagonalizzabile. Consideriamo la matrice caratteristica $\begin{pmatrix} a-T & b \\ 0 & d-T \end{pmatrix}$. Perchè B sia diagonalizzabile gli autovalori a e d devono essere distinti, altrimenti la $\dim V_a = 2 - 1 = 1 < 2$, come si deduce dal fatto che $(B - aI) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Come autovettori associati a $T = a$ e $T = d$ si possono scegliere $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (b, d - a)$.
Quindi la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d - a \end{pmatrix}$
ac e tale che $A = P^{-1}BP$. Da cui, se si vuole, $B = PaP^{-1}$.