FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria-Elettronica e Gestionale-Nuovo Ordinamento**

Prova assegnata il 24/09/02

I

In $\mathbb{R}^3$ sia data la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ con

$$v_1 = (1, 1, 0); \quad v_2 = (1, -1, 0); \quad v_3 = (0, -1, -1)$$

e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle relazioni seguenti:

$$f(v_1) = (2h, -1, -1); \quad f(v_2) = (2, -3, -1); \quad f(v_3) = (3, -3, 0)$$

1. Studiare al variare di h l'endomorfismo, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Dopo avere trovato la matrice $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$, studiare al variare di h la semplicità dell'endomorfismo f.
3. Determinare h e λ in modo che $w = (1, -1-h, -h)$ sia un autovettore associato all'autovalore λ.

Soluzione

1. Consideriamo la matrice $M(f)^{B,Can} = A = \begin{pmatrix} 2h & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e calcoliamo il suo determinante $|A|$. Semplici calcoli dicono che $|A| = -6h$.

   Quindi il rango di A è 3 per $h \neq 0$. In tal caso f è un isomorfismo.

   Se $h = 0$ il rango è 2 e quindi il nucleo si trova dal sistema $\begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ che ha come soluzioni $(3, -3, 2)$, che sono le componenti di un generatore del nucleo rispetto alla base B. Il nucleo è generato da $3(1, 1, 0) - 3(1, -1, 0) + 2(0, -1, -1) = (0, 2, -1)$.

   Una base dell'immagine è data dalla seconda e terza colonna della matrice A.

2. Per trovare la matrice $M^{B,B}(f)$ bisogna esprimere $f(v_1); f(v_2); f(v_3)$ nella base B e prendere tali componenti come colonne di detta matrice.

   Troviamo intanto le componenti di un vettore generico (a, b, c) rispetto alla base B.

   $$(a, b, c) = x(1, 1, 0) + y(1, -1, 0) + z(0, -1, -1)$$

   Tale equazione si traduce nel sistema

   $$\begin{cases} x + y = a \\ x - y - z = b \\ z = -c \end{cases}$$

   la cui soluzione è $(x, y, z) = (\frac{a+b-c}{2}, \frac{a-b+c}{2}, -c)$.

Dai valori $f(v_1) = (2h, -1, -1)$; $f(v_2) = (2, -3, -1)$; $f(v_3) = (3, -3, 0)$ si deduce che la matrice cercata è $M^{B,B}(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ h & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Per trovare gli autovalori troviamo le radici del polinomio caratteristico. Si ha

$$\begin{vmatrix} h-T & 0 & 0 \\ h & 2-T & 3 \\ 1 & 1 & -T \end{vmatrix} = 0$$

Gli autovalori sono $T = h$; $T = -1$; $T = 3$

L'endomorfismo è semplice per $h \neq -1, 3$

Per h=-1 la matrice caratteristica associata all'autovalore doppio $T = -1$ ha rango 2 e quindi la dimensione dell'autospazio V_{-1} è 1. L'endomorfismo non è semplice.

Analogamente per $h = 3$ l'endomorfismo non è semplice.

3. Troviamo le componenti del vettore $(1, -1-h, -h)$ nella base B. Esse sono $(0, 1, h)$. Usando la matrice $M^{B,B}(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ h & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si trova che

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ h & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+3h \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda h \end{pmatrix}$$

Si deduce il sistema

$$\begin{cases} 2 + 3h = \lambda \\ 1 = \lambda h \end{cases}$$

Si ottengono le soluzioni:

$$\begin{cases} h = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} h = \frac{1}{3} \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

1. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ definito da

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 2xy + \lambda y^2 + \lambda = 0 \end{cases}$$

determinando i punti base, le coniche spezzate e caratterizzando le coniche che vi appartengono.

2. Detta γ l'iperbole equilatera del fascio trovare una sua forma canonica.

3. Trovare l'equazione del cono avente vertice $V = (1, 1, 1)$ e direttrice la conica γ.

Soluzione

1. La matrice della conica è $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ e $|B| = \lambda^2 - \lambda = 0$. Le coniche spezzate si hanno per

$\lambda = 0 \Longrightarrow x(x + 2y) = 0$

$\lambda = 1 \Longrightarrow (x+y)^2 + 1 = 0 \Longrightarrow (x+y+i)(x+y-i) = 0.$

$\lambda = \infty \Longrightarrow (y+i)(y-i) = 0.$

I punti base sono i punti comuni a due qualunque coniche del fascio.

Dal sistema $\begin{cases} x(x+2y) = 0 \\ y = \pm i \end{cases}$ si hanno i punti base immaginari:

$$A = (0, -i);\ B = (0, i);\ C = (2i, -i);\ D = (-2i, i)$$

Inoltre $|A| = \lambda - 1$ e segue facilmente che si hanno

ellissi per $\lambda > 1$

iperboli per $\lambda < 1$.

Non ci sono parabole perchè per $\lambda = 1$ si ha, come abbiamo visto, una conica spezzata.

2. L'iperbole equilatera del fascio si trova ponendo la traccia $Tr(A) = a_{11} + a_{22} = 0$; si ha $\lambda = -1$. L'equazione dell'iperbole è $x^2 + 2xy - y^2 - 1 = 0$. Si ha facilmente $|B| = 2$; $\quad |A| = -2$. Dalla matrice $(A - TI) = \begin{pmatrix} 1-T & 1 \\ 1 & -1-T \end{pmatrix}$ si ha che il polinomio caratteristico è $T^2 - 2 = 0$. Gli autovalori sono $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = -\sqrt{2}$.

   Si avrà una forma canonica del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$. Tenendo conto che $|B|$ ed $|A|$ sono invarianti ortogonali si deduce
$$\begin{cases} -\alpha\beta\gamma = 2 \\ \alpha\beta = -2 \end{cases}$$

   Segue che $\gamma = 1$. Una forma canica è $\sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}Y^2 = 1$. Calcolando gli autovettori associati a α e β si determina la matrice della rotazione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

3. Per trovare il cono di vertice $V = (1,1,1)$ e direttrice l'iperbole equilatera, si considera un generico punto $G = (\alpha, \beta, 0)$ dell'iperbole, pertanto dovrà essere soddisfatta l'equazione di condizione: $\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 - 1 = 0$.

   La retta VG ha equazioni $\frac{x-1}{\alpha-1} = \frac{y-1}{\beta-1} = \frac{z-1}{-1}$. Quindi il cono si ottiene eliminando α e β dal sistema
$$\begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 - 1 = 0 \\ \alpha = \frac{x-z}{1-z} \\ \beta = \frac{y-z}{1-z} \end{cases}$$

   In definitiva l'equazione del cono è:

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 4xz + 2z - 1 = 0$$