Corso di Laurea in **Ingegneria Elettronica**
Prova scritta di ***Geometria***, assegnata il 16 - 7 - 2002

È assegnato, nello spazio, un sistema di rif. cart. ortog. $\{O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \mathrm{u}\}$.

I

Siano :

- i punti $A \equiv (1,0,0)$, $B \equiv (0,1,0)$,
- le rette : $r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ ed $s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z-1\}$,
- R il generico punto di r , S il generico punto di s ,
- C il punto medio del segmento AR , D il punto medio del segmento BS , P il punto medio del segmento CD .

1. – Determinare le equazioni del luogo Γ descritto dal punto P al variare di $R \in r$ e $S \in s$ con la condizione che i punti A, B, R, S siano complanari.

2. – Studiare la conica $\overline{\Gamma}$ (proiezione ortogonale di Γ sul piano $y = 0$):
$$\overline{\Gamma} : \begin{cases} 8x(x-z) - 4x + 3z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$$
determinando una sua forma canonica e le relative formule del cambiamento di coordinate.

3. – Determinare e studiare le quadriche Φ che contengono $\overline{\Gamma}$ e sono tangenti in Y_∞ al piano : $x + 2z = 0$.

Soluzione 1.–Le coordinate del generico punto R sono $R = (0,0,\lambda)$, quelle del generico punto S sono $S = (\mu-1, \mu-1, \mu)$. Il punto medio C di AR ha coordinate $C = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\lambda}{2})$ ed il punto medio D di BS ha coordinate $D = (\frac{\mu-1}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2})$.

Il punto medio P di CD ha coordinate $P = (x,y,z)$ tali che sia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\frac{\mu}{2}) = \frac{\mu}{4} \\ y = \frac{1}{2}(\frac{\mu}{2}) = \frac{\mu}{4} \\ z = \frac{1}{2}(\frac{\lambda+\mu}{2}) = \frac{\lambda+\mu}{4} \end{cases}$$

Perché i punti A, B, R, S siano complanari dev'essere nullo il determinante formato con le loro coordinate omogenee. Cioé
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ \mu-1 & \mu-1 & \mu & 1 \end{vmatrix} = 0$$
Sviluppando il determinante si ottiene l'equazione di condizione $3\lambda - \mu - 2\lambda\mu = 0$.

In definitiva eliminando i parametri λ e μ dal sistema e tenendo conto dell'equazione di condizione si ottiene il luogo richiesto Γ.

Esso è dato dal sistema

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x = y \\ 8x^2 - 8xz - 4x + 3z = 0 \end{cases}$$

2.– Per trovare la proiezione ortogonale di Γ sul piano $y = 0$, bisogna trovare il cilindro contenente Γ ed avente generatrici parallele all'asse delle $\vec{y}$ e poi secare col piano $y = 0$. Come è noto dalla teoria, bisogna prima eliminare y dal sistema che definisce Γ e poi secare col piano $y = 0$. Da ciò si ottiene che $\overline{\Gamma}$ è data dal sistema

$$\overline{\Gamma} \quad \begin{cases} 8x^2 - 8xz - 4x + 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Lavorando nel piano $\vec{x}\vec{z}$ la matrice della conica $\overline{\Gamma}$ è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Con facili calcoli si trova che: $|B| = 6; \quad |A| = -16$. Quindi la nostra conica è una iperbole e la sua forma canonica sarà del tipo : $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$.

Troviamo gli autovalori α e β di A. Il polinomio caratteristico è $T^2 - 8T - 16 = 0$; le radici sono: $\alpha = 4 + 4\sqrt{2}$ e $\beta = 4 - 4\sqrt{2}$. Ricordando il fatto che $|B|$ e $|A|$ sono invarianti ortogonali si deduce $-\alpha\beta\gamma = 6$ e $\alpha\beta = -16$. Ne segue che $\gamma = \frac{3}{8}$.

Quindi una forma canonica è: $(4 + 4\sqrt{2})X^2 + (4 - 4\sqrt{2})Y^2 = \frac{3}{8}$.

Calcoli un po' laboriosi, ma elementari, forniscono, con le solite regole, la matrice Q della rototraslazione. Essa è

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{3}{8} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove nell'ultima colonna ci sono le coordinate del centro di simmetria.

3.– La generica quadrica, scritta in coordinate omogenee, contenente $\overline{\Gamma}$ ha equazione

$$y(ax + by + cz + dt) + 8x^2 - 8xz - 4xt + 3zt = 0$$

Imponendo il passaggio per il punto $Y_\infty = (0, 1, 0, 0)$ si deduce che $b = 0$. Calcolando il piano tangente in Y_∞ si trova l'equazione: $ax + cz + d = 0$. Perchè questa equazione sia proporzionale a $x + 2z = 0$ si deduce che sia $d = 0; \quad c = 2a$. In definitiva le quadriche richieste hanno equazione:

$$y(ax + 2az) + 8x^2 - 8xz - 4x + 3z = 0$$

Si ha subito che $|B| = \frac{121a^2}{16}$ e che $|A| = 12a^2$.

In definitiva per $a \neq 0$ si hanno iperboloidi iperbolici.

Per $a = 0$ si ha un cilindro iperbolico.

II

1. – In $\mathbb{R}^4$ euclideo si determini il generico endomorfismo f tale che :
$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y\ ,\ z = t = 0\ \}$ sia l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$,
$V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 0\ ,\ z = t\ \}$ sia l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$.
$Imf = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y\ ,\ z = t\ \}$, 2. – Studiare f, determinando in ogni caso una base del nucleo e dell'immagine.

3. – Studiare la semplicità di f e determinare una base di autovettori di f. Dire se in qualche caso si può trovare una base ortonormale di autovettori.

4. – Calcolare $V_1^{\perp}$.

Soluzione

1.– Dai dati si deduce:

$$f(1,1,0,0) = 1(1,1,0,0); \quad f(0,0,1,1) = -1(0,0,1,1)$$

$$f(1,0,0,0) = a(1,1,0,0) + b(0,0,1,1); \quad f(0,0,1,0) = c(1,1,0,0) + d(0,0,1,1)$$

Quindi detta $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0); (0,0,1,1); (1,0,0,0); (0,0,1,0)\}$ base di $\mathbb{R}^4$ la matrice associata ad f rispetto a tale base è molto semplice e cioè:

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & c \\ 0 & -1 & b & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.– L'immagine $Im(f) = \{x = y;\ z = t\}$ è fissa mentre il nucleo si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} x + az + ct = 0 \\ -y + bz + dt = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (-az - ct, bz + dt, z, t)$$

Quindi $(-a, b, 1, 0)$ e $(-c, d, 0, 1)$ sono componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, di una base del nucleo.

Ne segue che i vettori:

$(-a + 1, -a, b, b)$ e $(-c, -c, d + 1, d)$ costituiscono una base del nucleo.

3.– Il polinomio caratteristico si calcola eguagliando a zero il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} 1-T & 0 & a & c \\ 0 & -1-T & b & d \\ 0 & 0 & -T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{vmatrix}$$

Si trovano gli autovalori: $T = 0$ contato due volte e $T = \pm 1$. Poichè il rango della matrice caratteristica per $T = 0$ è due l'endomorfismo è sempre semplice.

Due autovettori sono quelli dati dal testo e gli autovettori associati all'autovalore nullo sono i vettori della base del nucleo già determinati.

La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & 1-a & c & -c \\ a & 1-a & c & -c \\ b & -b & d & -1-d \\ b & -b & d & -1-d \end{pmatrix}$$

Ponendo

$$\begin{cases} a = 1-a \\ b = c \\ b = -c \\ d = -1-d \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

si ottiene una matrice simmetrica, e quindi è possibile trovare una base ortonormale di autovettori.

4.–Per trovare il sottospazio ortogonale a V_1 basta trovare i vettori (x, y, z, y) tali che sia $x + y = 0$. Si trova il generico elemento del sottospazio ortogonale $(x, -x, z, t)$.