FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 18/07/2002

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Si possono consultare solo i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $y = 0$ in $O = (0, 0)$ ed alla retta $x + y - 2 = 0$ in $A = (0, 2)$.

2) Sia $\mathcal{I}$ l'iperbole equilatera del fascio. Determinare e studiare il fascio di quadriche $\mathcal{Q}$ contenente $\mathcal{I}$, che ha in $(0, 0, 1, 1)$ piano tangente di equazione $y + z = 0$.

II

In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1, 1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1, 1)$.
Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h, h, 0, -h) \\ f(v_2) &= (2h, 3h, h + 1, 1 - h) \\ f(v_3) &= (-1, -3, h - 5, h - 4) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Verificare che l'endomorfismo f è semplice per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.
3. Sia $h = 1$. Trovare una base di autovettori di f.

Soluzione

I

La retta OA ha equazione $x = 0$, pertanto il fascio di coniche bitangenti è il seguente:

$$\phi : \quad kx^2 + y^2 + xy - 2y = 0.$$

Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} \text{k} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \text{-1} \\ 0 & \text{-1} & 0 \end{vmatrix} = -k$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow k = 0$. In tal caso ϕ si spezza nelle due rette $y(x+y-2) = 0$ (Ricordiamo che per $k = \infty$, si ottiene la conica spezzata nella retta $x = 0$ contata due volte).

2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{k} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = k - \frac{1}{4}$$

Si ha: $|A| = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$ e si ha una parabola. $|A| > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{4}$ e si hanno ellissi. $|A| < 0 \Leftrightarrow k < \frac{1}{4}$ e si hanno iperboli.
L'iperbole equilatera del fascio è $\mathcal{I} : x^2 - y^2 - xy + 2y = 0$. Quindi da

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 - y^2 - xy + 2y = 0$$

imponendo che il piano tangente in $(0, 0, 1, 1)$ sia $y + z = 0$, si ha

$$\frac{a}{2}x + \left(\frac{b}{2} + 1\right) y + \left(c + \frac{d}{2}\right) z + \frac{d}{2} = \rho y + \rho z$$

da cui si ottiene

$$a = 0, \quad b = 2c - 2, \quad c = \rho, \quad d = 0\,.$$

Pertanto il fascio di quadriche è il seguente

$$\Psi : \; x^2 - y^2 + cz^2 - xy + (2c - 2)yz - 2y = 0$$

Quindi

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{-1} & c-1 & 1 \\ 0 & c-1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -c$$

e

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{-1} & \text{c-1} \\ 0 & \text{c-1} & \text{c} \end{vmatrix} = -c^2 + \frac{3}{4}c - 1$$

Quindi:
$|B| = 0 \Leftrightarrow c = 0$. In questo caso $rk(B) = 3$ ed essendo $|A| = -1$, la quadrica è il cono:

$$\Psi: \; x^2 - y^2 - xy - 2yz + 2y = 0$$

Sia $|B| \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0$. In tal caso, si hanno quadriche non degeneri; in particolare, essendo $|A| \neq 0$, non si hanno paraboloidi, ma solo iperboloidi e/o ellissoidi. A tale scopo, studiamo il segno degli autovalori relativi al polinomio caratteristico associato alla sottomatrice A. Quindi:

$$|A - IT| = \begin{vmatrix} \text{1-T} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{-1-T} & c-1 \\ 0 & c-1 & \text{c-T} \end{vmatrix} =$$

$$= -T^3 + cT^2 + \left(c^2 - 2c + \frac{9}{4}\right) T - c^2 + \frac{3}{4}c - 1$$

e dalla regola di Cartesio si trova che si sono solo iperboloidi.

II

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ una base di V. Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h} & \text{h} & 1 \\ 0 & \text{h} & \text{-2} \\ 0 & 1 & \text{h-3} \end{vmatrix} = h(h^2 - 3h + 2)$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0, 1, 2$ ed in tali casi f è un isomorfismo.
Sia $h = 0$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\{(0,0,1), (1,-2,-3)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbf{R} \mid y = 0, z = 0\}$, pertanto una base è data da $\{(1,0,0)\} = v_1$.
Sia $h = 1$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\{(1,0,0),(1,1,1)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbf{R} \mid x = -3z, y = 2z\}$, pertanto una base è data da $\{(3,-2,-1)\}$.
Sia $h = 2$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è $\{(2,0,0),(2,2,1)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbf{R} \mid x = -\frac{3}{2}z, y = z\}$, pertanto una base è $\{(3,-2,-2)\}$.
Verifichiamo che f è semplice per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|\mathcal{A}-IT| = \begin{vmatrix} \text{h-T} & \text{h} & 1 \\ 0 & \text{h-T} & \text{-2} \\ 0 & 1 & \text{h-3-T} \end{vmatrix} = (h-T)\left(T^2 + (3-2h)T + h^2 - 3h + 2\right) =$$

$$= (h-T)(T-h+1)(T-h+2)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = h, \quad T_2 = h-1, \quad T_3 = h-2$$

ed essendo

$$T_1 \neq T_2 \neq T_3 \text{ per ogni } h \in \mathbb{R},$$

f ha sempre tre autovalori distinti e, quindi, f è semplice.
Sia adesso $h = 1$. Si hanno i seguenti autovalori:

$$T_1 = -1, \quad T_2 = 0 \quad \text{e} \quad T_3 = 1$$

Si ha:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in V \mid x = -z, y = z\} = \{(z,-z,-z)_{\mathcal{B}}.\}$$

ed una base è data dal vettore $w_1 = (1,-1,-1)_{\mathcal{B}}$.

$$V_0 = \{(x,y,z) \in V \mid x = -3z, y = 2z\} = \{(-3z,2z,z)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_2 = (3,-2,-1)_{\mathcal{B}}$.

$$V_1 = \{(x,y,z) \in V \mid y = 0, z = 0\} = \{(x,0,0)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (1,0,0)_{\mathcal{B}} = v_1$.
Quindi una base di autovettori è $\{w_1, w_2, v_1\}$.