FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 09/09/2002

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Si possono consultare solo i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$(1+k)x^2 - ky^2 + 2xy + (4+4k)x = 0$$

con k parametro reale. In particolare, trovare:

i) i punti base;

ii) le coniche spezzate.

2) Sia $\mathcal{I}$ l'iperbole equilatera del fascio. Determinare il cilindro $\mathcal{C}$ avente vertice $(0, 0, 1, 0)$ e direttrice $\mathcal{I}$.

II

In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (0, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 0, 0)$.
Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1, 1, h, 1) \\ f(v_2) &= (h, h, 1, h) \\ f(v_3) &= (1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.

2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui f è semplice, trovare una base di autovettori.

Soluzione

I

Sia

$$\phi: \quad (1+k)x^2 - ky^2 + 2xy + 2(2+2k)x = 0.$$

Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} 1+k & 1 & 2+2k \\ 1 & -k & 0 \\ 2+2k & 0 & 0 \end{vmatrix} = k(2+2k)^2$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow k = 0, -1$. Se $k = 0$, ϕ si spezza nelle due rette $x(x+2y+4) = 0$. Se $k = -1$, ϕ si spezza in $y(y+2x) = 0$.

2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0, -1$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = -(k^2+k+1)$$

Si ha: $|A| \neq 0$ e quindi non ci sono parabole. $|A| > 0 \Leftrightarrow k^2+k+1 < 0$ per nessun valore di $k \in \mathbb{R}$, e quindi non si hanno ellissi. $|A| < 0 \Leftrightarrow k^2+k+1 > 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, e pertanto si hanno solo iperboli.
L'iperbole equilatera del fascio è $\mathcal{I} : x^2 - y^2 + 4x = 0$, che si ottiene per $k = \infty$. Quindi da

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 - y^2 + 4x = 0$$

imponendo che $V = (0, 0, 1, 0)$ sia vertice, ovvero che $V = (0, 0, 1, 0)$ sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + \frac{a}{2}z + 2t = 0 \\ -y + \frac{b}{2}z = 0 \\ \frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y + cz + \frac{d}{2}t = 0 \\ 2x + \frac{d}{2}z = 0 \end{cases},$$

si ottiene

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

Pertanto il cilindro richiesto è il seguente

$$\Psi: \ x^2 - y^2 + 4x = 0$$

Un altro metodo per determinare l'equazione di Ψ è il seguente. Si consideri il punto generico $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{I}$. Esso deve soddisfare le equazioni di $\mathcal{I}$, quindi deve essere $z_0 = 0$ e $x_0^2 - y_0^2 + 4x_0 = 0$. Il cilindro è il luogo descritto dalle generatrici VP_0. Una tale retta ha equazioni:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Allora si devono eliminare i parametri dal sistema

$$\begin{cases} x_0^2 - y_0^2 + 4x_0 = 0 \\ x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

L'equazione che si ottiene è

$$\Psi : \; x^2 - y^2 + 4x = 0 \, .$$

II

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ una base di V. Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h} & 1 & 0 \\ 1 & \text{h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = h^2 - 1$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq \pm 1$ ed in tali casi f è un isomorfismo.
Sia $h = 1$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbf{R} \mid x = -y, z = 0\}$, pertanto una base è data da $\{(1,-1,0)\}$.
Sia $h = -1$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbf{R} \mid x = y, z = 0\}$, pertanto una base è data da $\{(1,1,0)\}$.
Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} \text{h-T} & 1 & 0 \\ 1 & \text{h-T} & 0 \\ 0 & 0 & \text{1-T} \end{vmatrix} = (1-T)\left[(h-T)^2 - 1\right] =$$

$$= (1-T)(h-T+1)(h-T-1)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = 1, \quad T_2 = h - 1, \quad T_3 = h + 1\,.$$

Se $h \neq 0, 2$, allora $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ e si hanno tre autovalori distinti. Dunque, f è semplice.
Sia adesso $h \neq 0, 2$. Si ha:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in V \mid x = 0, y = 0\} = \{(0, 0, z)_{\mathcal{B}}.\}$$

ed una base è data dal vettore $w_1 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = v_3$.

$$V_{h-1} = \{(x, y, z) \in V \mid x = -y, z = 0\} = \{(x, -x, 0)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_2 = (1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$.

$$V_{h+1} = \{(x, y, z) \in V \mid x = y, z = 0\} = \{(x, x, 0)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$.
Quindi una base di autovettori è $\{v_3, w_2, w_3\}$.
Sia $h = 0$; si ha $T_1 = -1$ semplice e $T_2 = 1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_1$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale ad uno si ha $\dim V_1 = 2$ e pertanto per $h = 0$ f è semplice. Si ha:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in V \mid x = y\} = \{(x, x, z)_{\mathcal{B}}.\}$$

ed una base è data dal vettore $w_1 = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ e dal vettore $w_2 = (0, 0, 1)$.

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in V \mid x = -y, z = 0\} = \{(x, -x, 0)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$.
Sia $h = 2$; si ha $T_1 = 3$ semplice e $T_2 = 1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_1$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale ad uno si ha $\dim V_1 = 2$ e pertanto anche per $h = 2$ f è semplice. Si ha:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in V \mid x = -y\} = \{(x, -x, z)_{\mathcal{B}}.\}$$

ed una base è data dal vettore $w_1 = (1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$ e dal vettore $w_2 = (0, 0, 1)$.

$$V_3 = \{(x, y, z) \in V \mid x = y, z = 0\} = \{(x, x, 0)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$.