Corso di Laurea in **Ingegneria Telematica**
Compito di **Elementi di Algebra e Geometria** del **18/7/02**

I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito dalle relazioni

$$f(0,1,-1) = (-2,-1,-1)$$
$$f(2,1,1) = (0,-1,1)$$
$$f(2,1,2) = (h+1,h,h+1)$$

con $h$ parametro reale.
1) Studiare $f$ al variare di $h$ determinando in cascun caso $Imf$ e $Kerf$.
2) Dopo aver controllato che $(1,1,1)$ è autovettore di $f$ verificare che $f$ è semplice per ogni valore di $h$. Nel caso $h = -1$ determinare una base di autovettori.
3) Determinare, al variare di $h$, il sottoinsieme

$$f^{-1}(0,-1,1) = \{v \in R^3 \mid f(v) = (0,-1,1)\}$$

verificando che esso non è un sottospazio.

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cat. ort. $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}.u.$
1) Sono assegnati il piano $\alpha :\ x - y + z = 0$ e la retta $r :\ x - y = y - z = 0$.
Determinare la generica retta $s$ incidente con $r$ ed ortogonale ad $\alpha$. Tra le rette $s$ determinare quelle che hanno distanza 1 dall'origine.
2) Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio $\Phi$ di coniche di equazione

$$x^2 + (h-1)y^2 - 4x + (2-h)y + 3 = 0$$

determinando in particolare le sue coniche spezzate ed i suoi punti base.
3) Detta **c** la circonferenza di $\Phi$ (che ha equazioni $z = x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$) determinare il cilindro che ha vertice di coordinate $(1,1,1,0)$ e come direttrice la circonferenza **c**.

SVOLGIMENTO

I

1) Dalle relazioni che definiscono $f$ ricaviamo il sistema lineare ad incognite vettoriali

$$\begin{cases} f(e_2) - f(e_3) & = & (-2,-1,-1) \\ 2f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) & = & (0,-1,1) \\ 2f(e_1) + f(e_2) + 2f(e_3) & = & (h+1,h,h+1) \end{cases}$$

dal quale ricaviamo

$$\begin{cases} f(e_1) = (-h,-1-h,1-h) \\ f(e_2) = (h-1,h,h-1) \\ f(e_3) = (h+1,h+1,h) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M(f) = \begin{pmatrix} -h & h-1 & h+1 \\ -1-h & h & h+1 \\ 1-h & h-1 & h \end{pmatrix}$$

Scegliamo di calcolare il determinante di $M(f)$ in quanto la riduzione non si presenta agevole

$$|M(f)| = -h^3 + (h^2-1)(1-h) - (h^2-1)(1+h) + 3h(h^2-1) = -h^3 + (h^2-1)(h) = -h$$

e qindi si debbono considerare due casi:
$h \neq 0$ $\quad f$ è un isomorfismo;
$h = 0$ $\quad$ la matrice $M(f)$ diviene

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Im\, f = \mathcal{L}\left((0,1,-1),(1,0,1)\right)$$

Determiniamo il nucleo di $f$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Ker\, f = \{(z,z,z)\} \text{ con base } (1,1,1)$$

2) Osservato che $f(1,1,1) = (h,h,h)$ – questo significa che $(1,1,1)$ è autovettore rispetto all'autovalore $h$ – poniamo $v_1 = (0,1,-1)$, $v_2 = (2,1,1)$, $v_3 = (1,1,1)$ e notiamo che l'endomorfismo $f$ è assegnato dalle relazioni

$$f(v_1) = -v_2; \quad f(v_2) = -v_1; \quad f(v_3) = hv_3$$

quindi avremo:

$$f(v_1 + v_2) = -(v_1 + v_2) \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V_{-1};$$
$$f(v_1 - v_2) = v_1 - v_2) \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V_1;$$

quindi per ogni valore di $h$ abbiamo la base di autovettori: $v_1 + v_2$, $v_1 - v_2$, $v_3$.

3) Dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} -h & h-1 & h+1 \\ -1-h & h & h+1 \\ 1-h & h-1 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e sappiamo che per $h \neq 0$ si tratta di un sistema di Cramer. In questo caso esiste una sola soluzione; poiché dai dati del problema sappiamo che $f(2,1,1) = (0,-1,1)$, possiamo concludere che $f^{-1}(0,-1,1) = (2,1,1)$. In alternativa questa soluzione si può determinare usando la regola di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & h-1 & h+1 \\ -1 & h & h+1 \\ 1 & h-1 & h \end{vmatrix}}{-h} = \frac{-2h}{-h} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -h & 0 & h+1 \\ -1-h & -1 & h+1 \\ 1-h & 1 & h \end{vmatrix}}{-h} = \frac{-h}{-h} = 1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -h & h-1 & 0 \\ -1-h & h & -1 \\ 1-h & h-1 & 1 \end{vmatrix}}{-h} = \frac{-h}{-h} = 1$$

Nel caso $h = 0$ dobbiamo ridurre la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

cioè dobbiamo risolvere il sistema lineare ridotto

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + z = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = z \\ x = 1 + z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(0,-1,1) = \{(z, 1+z, z)\}$$

II

1) Il punto generico $R \in r$ ha coordinate $R \equiv (a, a, a)$ ed il vettore ortogonale ad $\alpha$ ha componenti $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$. Quindi la retta $s$ ha equazioni

$$\frac{x-a}{1} = \frac{y-a}{-1} = \frac{z-a}{1} \quad \Rightarrow \quad s: \begin{cases} x + y = 2a \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Per trovare la distanza di $s$ dall'origine dobbiamo usare il piano per $O$ ortogonale ad $s$; questo piano è proprio $\alpha$. Secando $s$ con $\alpha$ si trova il punto $P \equiv (\frac{2}{3}a, \frac{4}{3}a, \frac{2}{3}a)$, e si ha:

$$d(O, s) = \overline{OP} = \sqrt{\frac{24}{9}a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

2) Consideriamo la matrice associata alla generica conica di $\Phi$ e ne calcoliamo il determinante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & h-1 & \frac{2-h}{2} \\ -2 & \frac{2-h}{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = -\frac{1}{4}h^2, \quad |A| = h - 1$$

e si ha:
$h = 0$ conica spezzata: $(x + y - 3)(x - y - 1) = 0$;
$h = \infty$ conica spezzata: $y(y - 1) = 0$
per trovare i punti base basta intersecare queste due coniche spezzate; con facili calcoli si trovano i punti $(3, 0)$, $(1, 0)$, e $(2, 1)$ contato due volte. Per le coniche irriducibili ($h \neq 0$) avremo:
$|A| > 0$ $h > 1$ ellissi. Per $h = 2$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.
$|A| < 0$ $h < 1$ iperboli. Non ci sono iperboli equilatere.
$|A| = 0$ $h = 1$ parabola, di equazione $x^2 - 4x + y + 3 = 0$.

3) Consideriamo la generica retta $t$ passante per il vertice e sechiamola col piano che contiene $\mathbf{c}$:

$$t: \begin{cases} x - z = h \\ y - z = k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - z = h \\ y - z = k \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P \equiv (h, k, 0)$$

imponendo che questo punto appartenga a $\mathbf{c}$ si ottiene la condizione

$$h^2 + k^2 - 4h + 3 = 0$$

ed eliminando i parametri $h$ e $k$ (ricavandoli dalle equazioni di $t$) si trova l'equazione del cilindro:

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 - 4(x - y) + 3 = 0$$