

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Telematica-Ambiente e Territorio**

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 09/09/2004

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

- 1) Trovare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti nell'origine alla retta $x + y = 0$ e passanti per i punti $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
- 2) Sia $\mathcal{I}$ l'iperbole equilatera del fascio. Determinare e studiare il fascio di quadriche $\mathcal{Q}$ contenente $\mathcal{I}$, aventi il piano $2x + 2y - 1 = 0$ tangente in $(0, 1, 0, 0)$ ed il piano $x + z = 0$ tangente in $(0, 0, 1, 0)$.

II

In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Sia $f : V \rightarrow V$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned}f(v_1) &= (h, 0, -h, 0) \\f(v_2) &= (1, 0, 0, 1) \\f(v_3) &= (0, 0, -h, -h)\end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Studiare la semplicità di f , e nei casi in cui è semplice determinare una base di autovettori.
3. Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ la controimmagine del sottospazio

$$W \subseteq \mathbb{R}^4 \text{ definito da } \begin{cases} z = 0 \\ x - y - t = 0 \\ hx - hy = 0 \end{cases}$$

Soluzione

I

Il fascio richiesto è il seguente:

$$(y-1)(x+y) + kx(x-y) = 0$$

da cui

$$\phi : kx^2 + y^2 + (1-k)xy - x - y = 0.$$

Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} k & \frac{1-k}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1-k}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}k$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow k = 0$. In tal caso ϕ si spezza nelle due rette $(y-1)(x+y) = 0$.
2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} k & \frac{1-k}{2} \\ \frac{1-k}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(k^2 - 6k + 1)$$

Si ha: $|A| = 0 \Leftrightarrow k = 3 \pm \sqrt{5}$ e si hanno due parabole.

$|A| > 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} < k < 3 + \sqrt{5}$ e si hanno ellissi. In particolare, per $k = 1$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

$|A| < 0 \Leftrightarrow k < 3 - \sqrt{5}$ e $k > 3 + \sqrt{5}$ e si hanno iperboli. Per $k = -1$ si ha l'iperbole equilatera $\mathcal{I} : x^2 - y^2 - 2xy + x + y = 0$.

Quindi da

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 - y^2 - 2xy + x + y = 0 = 0$$

imponendo che il piano $2x + 2y - 1 = 0$ sia tangente in $Y_\infty = (0, 1, 0, 0)$ si ha $b = 0$. Imponendo che il piano $x + z = 0$ sia tangente in $Z_\infty = (0, 0, 1, 0)$ si ha $a = 2\rho, c = \rho$ e $d = 0$. Pertanto il fascio di quadriche è il seguente

$$\Psi : x^2 - y^2 + \rho z^2 - 2xy + 2\rho xz + x + y = 0$$

Quindi1

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \rho & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \rho & 0 & \rho & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\rho(\rho - 2)$$

e

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \rho \\ -1 & -1 & 0 \\ \rho & 0 & \rho \end{vmatrix} = -\rho$$

Quindi:

$|B| = 0 \Leftrightarrow \rho = 0, 2$. In entrambi i casi $rk(B) = 3$. Per $\rho = 0$, si ha $|A| = 0$ e la quadrica è il cilindro: $\Psi : x^2 - y^2 - 2xy + x + y = 0$. Per $\rho = 2$, si ha $|A| = -2$ e la quadrica è il cono: $\Psi : x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + x + y = 0$. Sia $|B| \neq 0 \Leftrightarrow \rho \neq 0, 2$. In tal caso, si hanno quadriche non degeneri; in particolare, essendo $|A| \neq 0$, non si hanno paraboloidi, ma solo iperboloidi e/o ellissoidi. A tale scopo, studiamo il segno degli autovalori relativi al polinomio caratteristico associato alla sottomatrice A . Quindi:

$$\begin{aligned} |A - IT| &= \begin{vmatrix} 1-T & -1 & \rho \\ -1 & -1-T & 0 \\ \rho & 0 & \rho-T \end{vmatrix} = \\ &= -T^3 + \rho T^2 + (\rho^2 + 2)T + \rho^2 - 2\rho \end{aligned}$$

e dalla regola di Cartesio si trova che si sono solo iperboloidi.

II

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V . Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} h & 1 & 0 \\ -h & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -h \end{vmatrix} = 0 \text{ per ogni } h \in \mathbb{R}$$

Quindi f non è un isomorfismo:

In particolare, se $h \neq 0$ si ha $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $[(h, -h, 0)_{\mathcal{B}}, (1, -1, 1)_{\mathcal{B}}]$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbf{R} \mid y = -hx, z = -x\}$, pertanto una base è data da $[(1, -h, 1)_{\mathcal{B}}]$.

Se $h = 0$ si ha

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 1$. Pertanto $\dim Imf = 1$ ed una base è data da $[(-1, 1, 1)_{\mathcal{B}}]$; $\dim Kerf = 2$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbf{R} \mid y = 0\}$, pertanto una base è data da $[(1, 0, 0)_{\mathcal{B}}, (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}]$.

Calcoliamo adesso il polinomio caratteristico

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} h-T & 1 & 0 \\ -h & -1-T & 0 \\ 0 & 1 & -h-T \end{vmatrix} = (-h-T)[T^2 + (1-h)T] = -T(h+T)(T+1-h)$$

Si hanno i seguenti autovalori: $T_1 = 0, T_2 = -h$ e $T_3 = h - 1$. Si hanno tre autovalori distinti se e solo se $h \neq 0, 1, \frac{1}{2}$. In tal caso, si ha:

$$V_0 = \{(x, y, z) \in V \mid y = -hx, z = -x\} = \{(x, -hx, -x)\}$$

ed una base di V_0 è data dal vettore $(1, -h, -1)_{\mathcal{B}} = w_1$.

$$V_{-h} = \{(x, y, z) \in V \mid x = 0, y = 0\} = \{(0, 0, z)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base di V_{-h} è data dal vettore $(0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = v_3$.

$$V_{h-1} = \{(x, y, z) \in V \mid x = -y, z = \frac{1}{2h-1}y\} = \{(-y, y, \frac{1}{2h-1}y)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base di V_{h-1} è data dal vettore $(1 - 2h, 2h - 1, 1)_{\mathcal{B}} = w_2$. Pertanto la base di autovettori richiesta è $[w_1, v_3, w_2]$

Per $h = 0$ si ha $T_1 = 0$ doppio e $T_2 = -1$ semplice. Essendo in questo caso $\dim V_0 = 2$ allora f è semplice. Una base di V_0 è $[v_1, v_3]$. ed una base di V_{-1} è $[(1, -1, 1)_{\mathcal{B}} = w_3]$. Pertanto la base di autovettori richiesta è $[v_1, v_3, w_3]$

Sia adesso $h = 1$. Si ha $T_1 = 0$ doppio e $T_2 = -1$ semplice. Calcoliamo $\dim V_0$. Essendo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

uguale a due, allora $\dim V_0 = 1$ e quindi f non è semplice.

Sia $h = \frac{1}{2}$, si hanno $T_1 = -\frac{1}{2}$ doppio e $T_2 = 0$ semplice. Calcoliamo $\dim V_{-\frac{1}{2}}$.

Essendo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale a due, allora $\dim V_{-\frac{1}{2}} = 1$ e quindi f non è semplice.

Determiniamo adesso la controimmagine del sottospazio W . In particolare, per $h = 0$ si ha $W = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)) = \mathcal{L}(v_1, v_1 - v_2 + v_3)$, mentre per $h \neq 0$ si ha $W = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0)) = v_1$ e si verifica facilmente che in entrambi i casi $f^{-1}(W) = \emptyset$